

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 6. Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

$$a, b, c \in [0; 2] \Rightarrow (2-a)(2-b)(2-c) \leq 0 \Rightarrow 2(ab+bc+ca) - 4(a+b+c) - abc + 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca) - abc \leq 4 \Rightarrow 2(ab+bc+ca) \leq 4$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$$

Xây ra khi $a = 2; b = 1; c = 0$ và hoán vị

Câu 8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ac+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Xét VT - VP ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ab+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \\ &= \frac{a^2+ab-bc-a^2}{a(bc+a^2)} + \frac{b^2+bc-ac-b^2}{b(ac+b^2)} + \frac{c^2+ac-ab-c^2}{c(ab+c^2)} \\ &= \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} + \frac{c(b-a)}{b(ac+b^2)} + \frac{a(c-b)}{c(ab+c^2)} \end{aligned}$$

Do a, b, c bình đẳng nên giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $b(a-c) \geq 0, c(b-a) \leq 0, a(c-b) \leq 0$

$$a^3 \geq b^3 \geq c^3 \Rightarrow abc + a^3 \geq abc + b^3 \geq abc + c^3 \Rightarrow \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} \leq \frac{b(a-c)}{b(ac+b^2)}$$

$$\Rightarrow \text{VT} - \text{VP} \leq \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} + \frac{c(b-a)}{b(ac+b^2)} + \frac{a(c-b)}{c(ab+c^2)} = \frac{ab-ac}{b(ac+b^2)} + \frac{ac-ab}{c(ab+c^2)} = \frac{a(b-c)}{b(ac+b^2)} - \frac{a(b-c)}{c(ab+c^2)}$$

mà $\frac{1}{b(ac+b^2)} \leq \frac{1}{c(ab+c^2)}$ nên VT-VP < 0 đpcm