TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

ĐẠI SỐ

Bài 10. Cho các số thực không âm a,b,c thay đổi thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

HD:

Giá trị lớn nhất của biểu thức Q. Với mọi số thực $\mathrm{x,y}$ và z, ta có

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0.$$

Từ đó suy ra $2\left(xy+yz+zx\right)\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)$, hay

$$(x+y+z)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Sử dụng kết quả này, ta được

$$\begin{aligned}Q^4 &=\left[(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})^2\right]^2\le[3\left(a+b+b+c+c+a\right)]^2\\ &=36(a+b+c)^2\le 36\cdot 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=108.\end{aligned}$$

Suy ra $Q\le\sqrt[4]{108}$. Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức Q là $\sqrt[4]{108}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q. Từ giả thiết, ta có $a^2,b^2,c^2\le 1$. Suy ra $0\le a,b,c\le 1$. Từ đây, ta có $a\ge a^2$ và $b\ge b^2$. Từ đó $a+b\ge a^2+b^2$. Mà $0\le a^2+b^2=1-c^2\le 1$ nên $a^2+b^2\ge\left(a^2+b^2\right)^2$. Tóm lại, ta có

$$\sqrt{a+b}\ge\sqrt{a^2+b^2}\ge\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}=a^2+b^2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b+c}\ge b^2+c^2,\sqrt{c+a}\ge c^2+a^2$$

Từ các kết quả trên, ta suy ra

$$Q\ge a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2=2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a=1$ và $b=c=0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2.

Bình luận. Để chứng minh $Q \geq 2$, ta còn có hai cách tiếp cận khác như sau.

Cách 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c} &\geq 2\sqrt[4]{(a+b)(a+c)} = 2\sqrt[4]{a^2+ab+ac+bc} \\ &\geq 2\sqrt[4]{a^2+b^2+c^2+bc} = 2\sqrt[4]{1+bc} \geq 2\end{aligned}$$

Lại có $\sqrt{b+c} \geq 0$ nên $Q \geq 2$.

Cách 2. Tương tự như trong lời giải đã trình bày ở trên, ta có $0 \leq a,b,c \leq 1$ nên $a \geq a^2, b \geq b^2$ và $c \geq c^2$. Từ đây, với chú ý $(a+b)(a+c) \geq a^2, (b+c)(b+a) \geq b^2$ và $(c+a)(c+b) \geq c^2$, ta có

$$\begin{aligned}Q^2 &= (\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a})^2 \\ &= 2(a+b+c)+2\left[\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+c)(b+a)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}\right] \\ &\geq 2(a+b+c)+2(a+b+c) = 4(a+b+c) \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right) = 4.\end{aligned}$$

Suy ra $Q \geq 2$.

Bài 11. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $3^x + 2^y = 1 + 2^z$.

HD:

Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $y = 1$. Trong trường hợp này, ta có

$$2^z - 1 = 3^x$$

Suy ra $2^z \equiv 1 (\text{mod} 3)$. Nếu z là số lẻ, tức $z = 2k+1$ với k tự nhiên, thì ta có $2^z = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv 2$ $(\text{mod} 3)$, mâu thuẫn. Do đó z là số chẵn, tức $z = 2k$ với k nguyên dương. Khi đó, ta có

$$3^x = 2^{2k} - 1 = \left(2^k - 1\right)\left(2^k + 1\right).$$

Suy ra $2^k - 1$ và $2^k + 1$ đều là lũy thừa của 2. Mà hai số này không cùng chia hết cho 3 (do $\left(2^k+1\right) - \left(2^k - 1\right) = 2$ không chia hết cho 3) nên trong hai số phải có một số bằng 1. Lại có $2^k - 1 < 2^k + 1$ nên $2^k - 1 = 1$, tức $k = 1$. Một cách tương ứng, ta tính được $z = 2$ và $x = 1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2: $y \geq 2$. Vì $3^x > 1$ nên từ phương trình đã cho, ta có $2^z > 2^y$, tức $z > y$. Suy ra 2^y và 2^z cùng chia hết cho 4. Từ đó ta có $3^x \equiv 1 (\text{mod} 4)$. Nếu x là số lẻ, tức $x = 2\ell + 1$ với ℓ tự nhiên, thì $3^x = 3^{2\ell+1} = 3 \cdot 9^\ell \equiv 3 (\text{mod} 4)$, mâu thuẫn. Do đó x là số chẵn, tức $x = 2\ell$ với ℓ nguyên dương. - Giả sử $y \geq 4$. Khi đó, ta có 2^y và 2^z cùng chia hết cho 16 nên $3^x \equiv 1 (\text{mod1})6$. Nếu ℓ là số lẻ, tức $\ell = 2t+1$

với t tự nhiên, thì $3^x = 3^{4t+2} = 9\cdot 81^t \equiv 9 \pmod{16}$, mâu thuẫn. Do đó ℓ là số chẵn, tức $\ell = 2t$ với t nguyên dương. Suy ra $3^x = 3^{4t} = 81^t \equiv 1 \pmod 5$. Từ đó $2^z - 2^y$ chia hết cho 5, hay $2^{z-y} \equiv 1 \pmod 5$. Nếu $z-y$ là số lẻ, tức $z-y = 2u+1$ với u tự nhiên, thì $2^{z-y} = 2\cdot 4^u \equiv \pm 2 \pmod 5$, mâu thuẫn. Do đó $z-y$ là số chẵn, tức $z-y = 2u$ với u nguyên dương. Khi đó, ta có $2^z - 2^y = 2^y\left(4^u - 1\right)$ chia hết cho 3. Lại có 3^x chia hết cho 3 nên 1 chia hết cho 3, mâu thuẫn.

- Như vậy, ta phải có $y \le 3$. Nếu $y = 2$ thì ta có $3^x + 3 = 2^z$, suy ra 2^z chia hết cho 3, mâu thuẫn. Do đó $y = 3$. Khi đó, ta có

$$2^z - 3^{2\ell} = 7$$

Từ đây, ta có $2^z \equiv 1 \pmod 3$. Chứng minh tương tự trường hợp 1, ta suy ra z là số chẵn, tức $z = 2m$ với m nguyên dương. Khi đó ta có

$$\left(2^m - 3^\ell\right)\left(2^m + 3^\ell\right) = 7$$

Vì $2^m - 3^\ell < 2^m + 3^\ell$ và $2^m + 3^\ell > 0$ nên $2^m - 3^\ell = 1$ và $2^m + 3^\ell = 7$. Từ đó $m = 2$ và $\ell = 1$, hay ta có $z = 4$ và $x = 2$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có hai bộ số (x,y,z) thỏa mãn yêu cầu là $(1,1,2)$ và $(2,3,4)$.