

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  
**BẤT ĐẲNG THỨC (Tiếp)**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Bài 12.**

- a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $n^2 + 3n + 11$  không chia hết cho 49 .  
b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương  $(x, y, p)$  với  $p$  là số nguyên tố thỏa mãn

$$x^2 + p^2 y^2 = 6(x + 2p).$$

**Bài 13.**

- a) Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $5(x - y)^2 \leq x^2 + y^2$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2$ .  
b) Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $5(x + y + z)^2 \geq 14(x^2 + y^2 + z^2)$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{2x + z}{x + 2z}$ .

**Bài 14.**

- a) Giải phương trình:  $x^2 - 2x + 2 = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 1)}$ .  
b) Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $abc = 3$ . Tính giá trị của biểu thức  
$$P = \frac{1}{a^2(b+c)+3} + \frac{1}{b^2(c+a)+3} + \frac{1}{c^2(a+b)+3}.$$

**Bài 15.**

- a) Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng  $5^p + p^2$  chia hết cho 6 .  
b) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $x^3 - x^2 y + 2x = 5x^2 - 2y - 1$ .

**Bài 16.**

- a) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 2$ . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3(a + b + c) \geq -\frac{9}{4}.$$

- b) Tìm các số nguyên dương  $a, b, c$  sao cho các phương trình  $x^2 - 2ax + b = 0$ ,  $x^2 - 2bx + c = 0$  và  $x^2 - 2cx + a = 0$  đều có nghiệm là các số nguyên dương.

**Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt**

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  
**CỰC TRỊ HÌNH HỌC**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ .

a) Tính diện tích  $S$  của tam giác ABC theo  $a$ ,  $b$ ,  $c$

b) Chứng minh  $S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

**Câu 2.** Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

a) Chứng minh rằng:  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ .

b) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.

c) Chứng minh tỷ số  $\frac{AH^3}{BC \cdot BE \cdot CF}$  không đổi.

d) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác PEFQ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

**Câu 3.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh  $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$

b) Chứng minh  $\Delta CJH$  đồng dạng với  $\Delta HIB$

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh  $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để  $AH + CH$  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $AB < AC$  ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

a) Tính  $\widehat{BIF}$ .

b) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu  $AM = AB$  thì tứ giác ABHI nội tiếp.

c) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

**Giáo viên: Thầy Trần Ngọc Hà**