

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  
**HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Bài 4.** Cho  $a, b, c$  không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $K = a^2 + b^2 + c^2 + abc$ .

$$\text{HD: } 4 \leq K\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}\right) \leq K.$$

Giả sử  $a \leq b \leq c \Rightarrow b < 2; a + c = 3 - b$

$$\text{Ta chứng minh: } K = K(a, b, c) \geq K\left(\frac{a+c}{2}; b; \frac{a+c}{2}\right) = K_1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \frac{a+c}{2} \cdot b \cdot \frac{a+c}{2} = k_1$$

$$\Leftrightarrow \left[ a^2 + c^2 - \frac{(a+c)^2}{2} \right] + b \left[ ac - \frac{(a+c)^2}{4} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-c)^2}{2} - b \cdot \frac{(a-c)^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{(a-c)^2}{4}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{[2-b]}_{> 0} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Ta chứng minh nốt  $k_1 \geq 4$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+c)^2}{2} + b^2 + b \cdot \frac{(a+c)^2}{4} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-3)^2}{2} + b^2 + \frac{b \cdot (b-3)^2}{4} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 2(b-3)^2 + 4b^2 + b(b-3)^2 \geq 16$$

$$\Leftrightarrow b^3 - 3b + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(b+2)}_{> 0} \underbrace{(b-1)^2}_{\geq 0} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy  $k \geq k_1 \geq 4 \Rightarrow k_{\min} = 4$  tại  $a = b = c = 1$ .