TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....**Ngày học:** ....

ĐẠI SỐ

Bài 4. Cho $x, y, z > 0; xyz = 1$ CMR $x^2 + y^2 + z^2 - 3 \ge 18\left((x+y+z)-(xy+yz+zx)\right)$

HD: Trong 3 số x, y, z có 1 số lớn hơn hoặc bằng 1, giả sử $x \ge 1$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 - 18\left((x+y+z)-(xy+yz+zx)\right)$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = x^2 + yz + yz - 3 - 18\left(\left(x+\sqrt{yz}+\sqrt{yz}\right)-\left(x\sqrt{yz}+\sqrt{yz}.\sqrt{yz}+x\sqrt{yz}\right)\right)$$

$$f(x,y,z) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = (y-z)^2 - 18\left(y+z-2\sqrt{yz}\right) + 18\left(xy+zx-2x\sqrt{yz}\right)$$

$$f(x,y,z) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = (y-z)^2 - 18\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2 + 18x\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2 \ge 0 (x \ge 1)$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = x^2 + yz + yz - 3 - 18\left(\left(x+\sqrt{yz}+\sqrt{yz}\right)-\left(x\sqrt{yz}+\sqrt{yz}.\sqrt{yz}+x\sqrt{yz}\right)\right)$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = x^2 + \frac{2}{x} - 3 - 18\left(\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)-\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = x^2 + \frac{2}{x} - 3 - 18x - \frac{36}{\sqrt{x}} + 36\sqrt{x} + \frac{18}{x}$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) = x^2 - 18x + 36\sqrt{x} + \frac{20}{x} - \frac{36}{\sqrt{x}} - 3$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right)$$

$$f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) \ge 0 \Leftrightarrow x^3 - 18x^2 + 36x\sqrt{x} - 3x - 36\sqrt{x} + 20 \ge 0$$

Đặt $\sqrt{x} = t \ge 1$

$$x^3 - 18x^2 + 36x\sqrt{x} - 3x - 36\sqrt{x} + 20 \ge 0 \Leftrightarrow t^6 - 18t^4 + 36t^3 - 3t^2 - 36t + 20 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t-2)^2(t+1)(t+5) \ge 0 (dung)$$

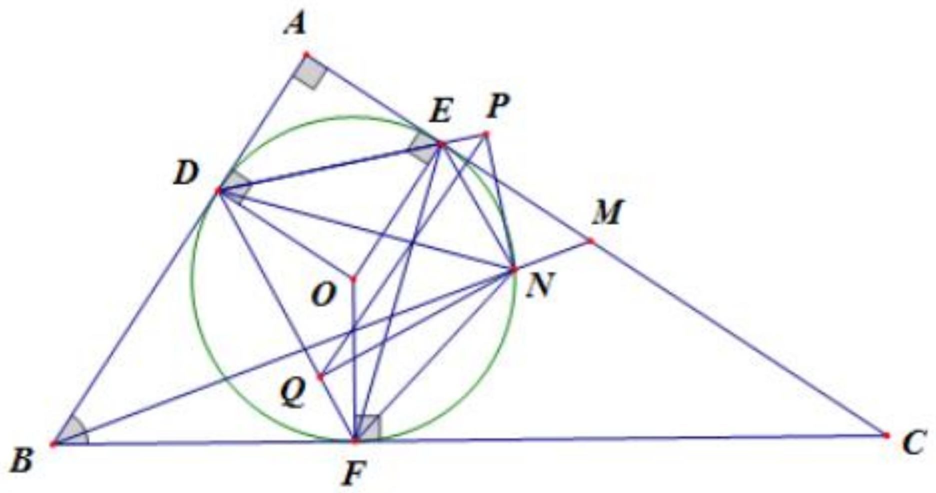
Vậy $x^2 + y^2 + z^2 - 3 \ge 18\left((x+y+z)-(xy+yz+zx)\right)$

HÌNH HỌC

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC,BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K.

d) Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

HD:



Vì DPN+DQN=90^o+90^o=180^o nên DPNQ là tứ giác nội tiếp

=>QPN=QDN (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN) (5)

Mặt khác DENF là tứ giác nội tiếp nên QDN=FEN (6)

Từ (5) và (6) ta có FEN=QPN (7)

Tương tự ta có: EFN=PQN (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\Delta NPQ \sim \Delta NEF(g.g) \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF}$

Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có

$NQ \le NF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF} \le 1 \Rightarrow PQ \le EF$

Dấu bằng xảy ra khi $Q \equiv F \Leftrightarrow NF \perp DF \Leftrightarrow$ D, O, N thẳng hàng.

Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN, với N là điểm đối xứng với D qua O.