

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
 Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

CA 1

Câu 10. Cho các số dương a,b,c,d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$.

$$\text{CMR: } S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2.$$

HD:

$$+ \frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

+ Tương tự, cộng lại có:

$$S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq a + b + c + d - \left(\frac{ab+bc+cd+da}{2} \right) = 4 - \frac{ab+bc+cd+da}{2}.$$

$$+ \text{Do } ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4} = 4.$$

Vậy $S \geq 4 - 2 = 2$.

CA 2

Câu 10: Cho tam giác nhọn ABC không cân có $AB < AC$, trực tâm H và đường trung tuyến AM. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AM, L là điểm đối xứng của K qua BC

a) Chứng minh các tứ giác BCKH và ABLC nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{LAB} = \widehat{MAC}$

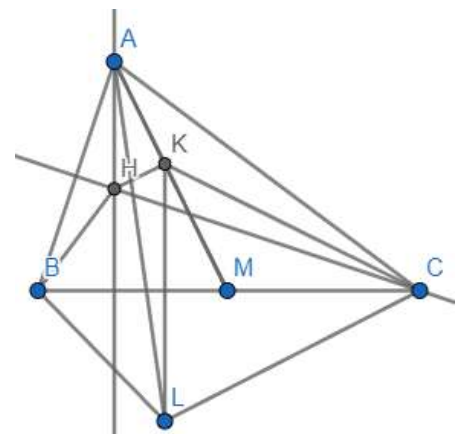
Gọi E, F, G theo thứ tự là chân các đường cao AE, BF, CG của tam giác ABC.

$$\triangle AHK \sim \triangle AME (g - g) \Rightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AK \cdot AM = AH \cdot AE$$

$$\triangle AHF \sim \triangle ACE (g - g) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AC \cdot AF = AH \cdot AE$$

$$\text{Từ đó suy ra } AK \cdot AM = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AF}{AM} \Rightarrow \triangle AFK \sim \triangle AMC \Rightarrow \angle AKF = \angle ACM$$

$\triangle FBC$ vuông tại F có FM là đường trung tuyến



$$\Rightarrow FM = MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle MFC \text{ cân tại } M \Rightarrow \angle MFC = \angle MCF = \angle ACB$$

Xét tứ giác BHKC có:

$$\begin{aligned} \angle HKC + \angle HBC &= \angle HKM + \angle MKC + \angle HBC \\ &= 90^\circ + \angle MFC + \angle HBC = 90^\circ + \angle ACB + \angle HBC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác BHKC nội tiếp

A G H F nội tiếp $\Rightarrow \angle BAC + \angle GHF = 180^\circ$ mà $\angle GHF = \angle BHC$ (đối đỉnh)

Lại có: BHKC nội tiếp $\Rightarrow \angle BHC = \angle BKC$ mà $\angle BKC = \angle BLC$ (K, L đối xứng qua BC)

$$\widehat{BKC} + \widehat{BLC} = 180^\circ \Rightarrow \text{ABLC là tứ giác nội tiếp. (dnhb)}$$

b) Chứng minh $\angle LAB = \angle MAC$.

Ta có: $\angle LAB = \angle LCB$ (ABLC nội tiếp, hai góc nội tiếp cùng chắn cung BL)

Mà $\angle LCB = \angle KCM$ (K đối xứng L qua BC) $\Rightarrow \angle LAB = \angle KCM$ (1)

$\triangle AMC$ và $\triangle CMK$ có $\angle KMC$ chung và $\angle MKC = \angle ACB$

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle CMK (g - g) \Rightarrow \angle KCM = \angle MAC$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle LAB = \angle MAC$ (dpcm).