

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CÔ SI NGƯỜC DẤU 2
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + ab + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Câu 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}$$

Câu 3. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. CM:

$$S = \frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + d^2} + \frac{d}{1 + a^2} \geq 2.$$

Câu 4. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR: $\frac{a}{a + b^2} + \frac{b}{b + c^2} + \frac{c}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 5. (Thi thử chuyên Sư Phạm 2023)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của $P = \frac{1 + x^2}{z + 2} + \frac{1 + y^2}{x + 2} + \frac{1 + z^2}{y + 2}$.

Câu 6. Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x - z) + y(y - z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^3}{x^2 + z^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$.

Câu 7. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a + b + c = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 8. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq 1$.

Câu 9. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $ab + bc + ac = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2}{c(c^2 + a^2)} + \frac{b^2}{a(a^2 + b^2)} + \frac{c^2}{b(b^2 + c^2)}.$$

Câu 10. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2}.$$

Câu 11. Cho $a, b, c > 0; (a + b + c)abc = 3$.

Tìm GTNN của $P = \frac{a^5}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^5}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^5}{c^3 + 2a^3}$.

Câu 12. Cho x, y, z là 3 số không nhỏ hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) + 2\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 9.$$

Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CHỨNG MINH THẲNG HÀNG- ĐỒNG QUY (Tiếp)
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A)

- Chứng minh rằng tứ giác DMEF nội tiếp
- Chứng minh rằng tứ giác IOMK là hình thang cân
- Chứng minh rằng $KF \cdot HE = KE \cdot KF$.
- Chứng minh AK, EF, BC đồng quy.
- Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), D là một điểm trên cung BC không chứa A. Dụng hình bình hành ADCE. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB, gọi I là giao điểm của EK với AC

- Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng
- Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KH.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua OM, giao điểm của AB và OM là H

- Chứng minh tứ giác MAOI nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$
- Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F. Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- Kẻ đường kính DK của đường tròn (O). Gọi N là hình chiếu của A trên DK. Đường thẳng MK cắt AN tại E. Chứng minh E là trung điểm của AN.

Câu 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O; R) sao cho $AD \parallel MB$ và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O; R)

- Gọi H là giao điểm của các đường thẳng OM và AB. Chứng minh rằng $MH \cdot MO = MC \cdot MD$ và tứ giác OHCD nội tiếp

b) Gọi G là trọng tâm tam giác MAB . Chứng minh rằng ba điểm A, C, G thẳng hàng

Câu 5. Từ điểm M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O) và cát tuyến MCD , MPQ ($MC < MD, MP < MQ$). Chứng minh các dây PD, QC cắt nhau tại một điểm I nằm trên AB .

Câu 6. Từ điểm A nằm ngoài (O) đường kính BC dựng các tiếp tuyến AE, AF đến (O) . Chứng minh trục tâm tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF .

Thầy Trần Ngọc Hà

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CÔ SI NGƯỜC DẤU 2
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + ab + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Câu 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}$$

Câu 3. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. CM:

$$S = \frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + d^2} + \frac{d}{1 + a^2} \geq 2.$$

Câu 4. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR: $\frac{a}{a + b^2} + \frac{b}{b + c^2} + \frac{c}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 5. (Thi thử chuyên Sư Phạm 2023)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của $P = \frac{1 + x^2}{z + 2} + \frac{1 + y^2}{x + 2} + \frac{1 + z^2}{y + 2}$.

Câu 6. Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x - z) + y(y - z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^3}{x^2 + z^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$.

Câu 7. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a + b + c = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 8. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq 1$.

Câu 9. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $ab + bc + ac = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2}{c(c^2 + a^2)} + \frac{b^2}{a(a^2 + b^2)} + \frac{c^2}{b(b^2 + c^2)}.$$

Câu 10. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{1 + 9b^2} + \frac{b}{1 + 9c^2} + \frac{c}{1 + 9a^2}.$$

Câu 11. Cho $a, b, c > 0; (a + b + c)abc = 3$.

Tìm GTNN của $P = \frac{a^5}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^5}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^5}{c^3 + 2a^3}$.

Câu 12. Cho x, y, z là 3 số không nhỏ hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) + 2\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 9.$$

Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CHỨNG MINH THẲNG HÀNG- ĐỒNG QUY (Tiếp)
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A)

- Chứng minh rằng tứ giác DMEF nội tiếp
- Chứng minh rằng tứ giác IOMK là hình thang cân
- Chứng minh rằng $KF \cdot HE = KE \cdot KF$.
- Chứng minh AK, EF, BC đồng quy.
- Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), D là một điểm trên cung BC không chứa A. Dụng hình bình hành ADCE. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB, gọi I là giao điểm của EK với AC

- Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng
- Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KH.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua OM, giao điểm của AB và OM là H

- Chứng minh tứ giác MAOI nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$
- Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F. Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- Kẻ đường kính DK của đường tròn (O). Gọi N là hình chiếu của A trên DK. Đường thẳng MK cắt AN tại E. Chứng minh E là trung điểm của AN.

Câu 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O; R) sao cho $AD \parallel MB$ và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O; R)

- Gọi H là giao điểm của các đường thẳng OM và AB. Chứng minh rằng $MH \cdot MO = MC \cdot MD$ và tứ giác OHCD nội tiếp

b) Gọi G là trọng tâm tam giác MAB . Chứng minh rằng ba điểm A, C, G thẳng hàng

Câu 5. Từ điểm M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O) và cát tuyến MCD , MPQ ($MC < MD, MP < MQ$). Chứng minh các dây PD, QC cắt nhau tại một điểm I nằm trên AB .

Câu 6. Từ điểm A nằm ngoài (O) đường kính BC dựng các tiếp tuyến AE, AF đến (O) . Chứng minh trục tâm tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF .

Thầy Trần Ngọc Hà

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CÔ SI NGƯỜC DẤU 2
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + ab + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Câu 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}$$

Câu 3. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. CM:

$$S = \frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + d^2} + \frac{d}{1 + a^2} \geq 2.$$

Câu 4. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR: $\frac{a}{a + b^2} + \frac{b}{b + c^2} + \frac{c}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 5. (Thi thử chuyên Sư Phạm 2023)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của $P = \frac{1 + x^2}{z + 2} + \frac{1 + y^2}{x + 2} + \frac{1 + z^2}{y + 2}$.

Câu 6. Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x - z) + y(y - z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^3}{x^2 + z^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$.

Câu 7. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a + b + c = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 8. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq 1$.

Câu 9. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $ab + bc + ac = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2}{c(c^2 + a^2)} + \frac{b^2}{a(a^2 + b^2)} + \frac{c^2}{b(b^2 + c^2)}.$$

Câu 10. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2}.$$

Câu 11. Cho $a, b, c > 0; (a + b + c)abc = 3$.

Tìm GTNN của $P = \frac{a^5}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^5}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^5}{c^3 + 2a^3}$.

Câu 12. Cho x, y, z là 3 số không nhỏ hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) + 2\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 9.$$

Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CHỨNG MINH THẲNG HÀNG- ĐỒNG QUY (Tiếp)
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A)

- Chứng minh rằng tứ giác DMEF nội tiếp
- Chứng minh rằng tứ giác IOMK là hình thang cân
- Chứng minh rằng $KF \cdot HE = KE \cdot KF$.
- Chứng minh AK, EF, BC đồng quy.
- Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), D là một điểm trên cung BC không chứa A. Dụng hình bình hành ADCE. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB, gọi I là giao điểm của EK với AC

- Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng
- Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KH.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua OM, giao điểm của AB và OM là H

- Chứng minh tứ giác MAOI nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$
- Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F. Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- Kẻ đường kính DK của đường tròn (O). Gọi N là hình chiếu của A trên DK. Đường thẳng MK cắt AN tại E. Chứng minh E là trung điểm của AN.

Câu 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O; R) sao cho $AD \parallel MB$ và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O; R)

- Gọi H là giao điểm của các đường thẳng OM và AB. Chứng minh rằng $MH \cdot MO = MC \cdot MD$ và tứ giác OHCD nội tiếp

b) Gọi G là trọng tâm tam giác MAB . Chứng minh rằng ba điểm A, C, G thẳng hàng

Câu 5. Từ điểm M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O) và cát tuyến MCD , MPQ ($MC < MD, MP < MQ$). Chứng minh các dây PD, QC cắt nhau tại một điểm I nằm trên AB .

Câu 6. Từ điểm A nằm ngoài (O) đường kính BC dựng các tiếp tuyến AE, AF đến (O) . Chứng minh trục tâm tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF .

Thầy Trần Ngọc Hà

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CÔNG NGHỆ DẤU 2
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + ab + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Câu 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}$$

Câu 3. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. CM:

$$S = \frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + d^2} + \frac{d}{1 + a^2} \geq 2.$$

Câu 4. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. CMR: $\frac{a}{a + b^2} + \frac{b}{b + c^2} + \frac{c}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 5. (Thi thử chuyên Sư Phạm 2023)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của $P = \frac{1 + x^2}{z + 2} + \frac{1 + y^2}{x + 2} + \frac{1 + z^2}{y + 2}$.

Câu 6. Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x - z) + y(y - z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^3}{x^2 + z^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$.

Câu 7. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a + b + c = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{3}{2}$.

Câu 8. Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq 1$.

Câu 9. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $ab + bc + ac = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2}{c(c^2 + a^2)} + \frac{b^2}{a(a^2 + b^2)} + \frac{c^2}{b(b^2 + c^2)}.$$

Câu 10. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{1 + 9b^2} + \frac{b}{1 + 9c^2} + \frac{c}{1 + 9a^2}.$$

Câu 11. Cho $a, b, c > 0; (a + b + c)abc = 3$.

Tìm GTNN của $P = \frac{a^5}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^5}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^5}{c^3 + 2a^3}.$

Câu 12. Cho x, y, z là 3 số không nhỏ hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) + 2\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 9.$$

Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
CHỨNG MINH THẲNG HÀNG- ĐỒNG QUY (Tiếp)
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 1. Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A)

- Chứng minh rằng tứ giác $DMEF$ nội tiếp
- Chứng minh rằng tứ giác $IOMK$ là hình thang cân
- Chứng minh rằng $KF \cdot HE = KE \cdot KF$.
- Chứng minh AK, EF, BC đồng quy.
- Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T . Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy.

Câu 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , D là một điểm trên cung BC không chứa A . Dụng hình bình hành $ADCE$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE . Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB , gọi I là giao điểm của EK với AC

- Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng
- Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KH .

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AB và OM là H

- Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$
- Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F . Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- Kẻ đường kính DK của đường tròn (O) . Gọi N là hình chiếu của A trên DK . Đường thẳng MK cắt AN tại E . Chứng minh E là trung điểm của AN .

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm trên cung lớn AB của đường tròn $(O; R)$ sao cho $AD \parallel MB$ và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn $(O; R)$

- Gọi H là giao điểm của các đường thẳng OM và AB . Chứng minh rằng $MH \cdot MO = MC \cdot MD$ và tứ giác $OHCD$ nội tiếp

b) Gọi G là trọng tâm tam giác MAB . Chứng minh rằng ba điểm A, C, G thẳng hàng

Câu 5. Từ điểm M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O) và cát tuyến MCD , MPQ ($MC < MD, MP < MQ$). Chứng minh các dây PD, QC cắt nhau tại một điểm I nằm trên AB .

Câu 6. Từ điểm A nằm ngoài (O) đường kính BC dựng các tiếp tuyến AE, AF đến (O) . Chứng minh trục tâm tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF .

Thầy Trần Ngọc Hà