

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: Ngày học:

Câu 15. Cho các số dương a, b, c, d . Chứng minh: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$.

HD:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

$$\text{Xét } \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4$$
$$= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4$$
$$\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0$$

\Rightarrow đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$

Câu 3. Hình thang ABCD có độ dài các đáy $AB = b, CD = a$ ($a > b$). Đoạn thẳng MN song song với với đáy, có hai đầu mút thuộc hai cạnh bên chia hình thang ra hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng $MN^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm của AD và BC.

Đặt $S_{ABNM} = S_{MNCD} = S$. Đặt $MN = x$.

$$\triangle OAB \sim \triangle OMN \text{ nên } \frac{S_{OAB}}{S_{OMN}} = \left(\frac{b}{x} \right)^2.$$

$$\triangle ODC \sim \triangle OMN \text{ nên } \frac{S_{ODC}}{S_{OMN}} = \left(\frac{a}{x} \right)^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{S_{ODC} + S_{OAB}}{S_{OMN}} = \frac{(S_{OMN} + S) + (S_{OMN} - S)}{S_{OMN}} = 2.$$

$$\text{Vậy } x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$