TÀI LIỆU TOÁN LỚP 12
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị của $a \in \left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$ sao cho $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

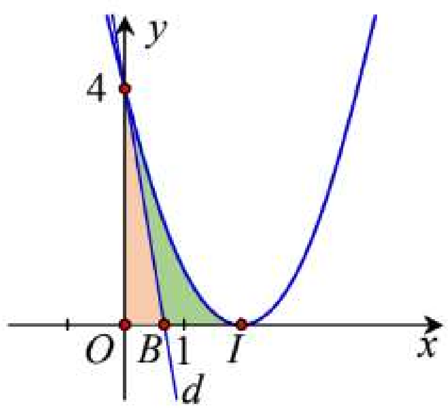
Ta có $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \int_0^a \frac{-d(1+3\cos x)}{3\sqrt{1+3\cos x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{1+3\cos x}\Big|_0^a = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{1+3\cos a}$

Theo giả thiết $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{1+3\cos a} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vì $a \in \left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$ nên $a = \frac{\pi}{2}, a = \frac{3\pi}{2}$

Câu 13. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 4x + 4$, trục hoành và trục tung. Xác định k để đường thẳng d đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia H thành hai phần có diện tích bằng nhau.



A. $k = -8$. **B.** $k = -4$. **C.** $k = -6$. **D.** $k = -2$.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - 4x + 4$, trục hoành và trục tung:

$$S_H = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{8}{3} \text{ (đvdt)}$$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có phương trình $y = kx + 4$

$\Rightarrow d$ cắt Ox tại $B\left(-\frac{4}{k};0\right)$

Vì d chia H thành hai phần nên $B\left(-\frac{4}{k};0\right)$ nằm giữa $O(0;0)$ và $I(2;0) \Rightarrow 0 < -\frac{4}{k} < 2$

Ta có hình phẳng giới hạn bởi d và các trục tọa độ là $S_{OAB} = \frac{1}{2}.4.\left|\frac{-4}{k}\right| = \frac{8}{-k}$

Theo giả thiết $S_H = 2S_{OAB} \Rightarrow \frac{8}{3} = 2.\frac{8}{-k} \Leftrightarrow k = -6$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x).f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{\left(x^3 - 3x^2\right) f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{14}{3}$. **B.** $I = -\frac{32}{5}$. **C.** $I = -\frac{16}{3}$. **D.** $I = -\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ \mathrm{d}v = \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 3\left(x^2 - 2x\right) \mathrm{d}x \\ v = \ln f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left(x^3 - 3x^2\right) \ln f(x)\Big|_0^2 - 3\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln f(x) \mathrm{d}x = -4\ln f(2) - 3\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln f(x) \mathrm{d}x$$

Mà $f(x).f(2-x) = e^{2x^2-4x} \Rightarrow f(2).f(0) = 1 \Rightarrow f(2) = 1$

$$\Rightarrow I = -3\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) \ln f(x) \mathrm{d}x$$

Đặt $t = 2 - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow I=-3\int_2^0\left(t^2-2t\right)\ln f(2-t)\left(-\mathrm{d}t\right)=-3\int_0^2\left(t^2-2t\right)\ln f(2-t)\mathrm{d}t=-3\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln f(2-x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2I=-3\int_0^2\left(x^2-2x\right)\left[\ln f(x)+\ln f(2-x)\right]\mathrm{d}x=-3\int_0^2\left(x^2-2x\right)\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I=-3\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}$$

Câu 15. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị (C). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) với $y<0$ và trục hoành; gọi S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) với $y>0$ và trục hoành. Với giá trị nào của m thì $S=S'$?

A. $m=2$. **B.** $m=\frac{2}{9}$. **C.** $m=\frac{20}{9}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn C.

Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình: $x^4-4x^2+m=0\,(1)$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$, ta có phương trình $t^2-4t+m=0$ (2).

Để tồn tại S, S' thì (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$(2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4$

Khi đó (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0<t_1<t_2$

$\Rightarrow$ (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

$$\Rightarrow S=\int_{-\sqrt{t_2}}^{-\sqrt{t_1}}\left(-x^4+4x^2-m\right)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}}\left(-x^4+4x^2-m\right)\mathrm{d}x=2\int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}}\left(-x^4+4x^2-m\right)\mathrm{d}x$$

$$S'=\int_{-\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_1}}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{t_1}}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x$$

Theo giả thiết $S=S'\Rightarrow \int_0^{\sqrt{t_1}}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x=-\int_{\sqrt{t_1}}^{\sqrt{t_2}}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^{\sqrt{t_2}}\left(x^4-4x^2+m\right)\mathrm{d}x=0$

$$\Leftrightarrow\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+mx\right)\right|_0^{\sqrt{t_2}}=0\Leftrightarrow\frac{t_2^2}{5}-\frac{4t_2}{3}+m=0\quad(3)$$

Mà $t_2^{\,2}-4t_2+m=0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $m=\dfrac{20}{9}$.

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3$ và đồ thị hàm số $y=-x$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng (d) là nghiệm của phương trình:

$$-x^3=-x \Leftrightarrow -x^3+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Xét hiệu: $-x^3+x\le 0, \forall x\in[-1;0]$ và $-x^3+x\ge 0, \forall x\in[0;1]$

Khi đó diện tích hình phẳng: $S=-\int_{-1}^{0}(-x^3+x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.