TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
ĐẠO HÀM
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:.. Ngày học:...................................

1. Bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm

Từ vị trí O (ở một độ cao nhất định nào đó), ta thả một viên bi cho rơi tự do xuống đất và nghiên cứu chuyển động của viên bi. Bằng việc chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống đất, gốc O là vị trí ban đầu của viên bi, tức là tại thời điểm 0 giây, và bỏ qua sức cản không khí, ta nhận được phương trình chuyển động của viên bi là $y = f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ (g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8\,m/s^2$).

Giả sử tại thời điểm x_0, viên bi ở vị trí M_0 có $y_0 = f(x_0)$; tại thời điểm x_1, viên bi ở vị trí M_1 có $y_1 = f(x_1)$. Khi đó, trong khoảng thời gian từ x_0 đến x_1, quãng đường viên bi đi được là

$M_0M_1 = f(x_1) - f(x_0)$

Vậy vận tốc trung bình của viên bi trong khoảng thời gian đó là: $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Nếu $x_1 - x_0$ càng nhỏ thì tỉ số trên càng phản ánh chính xác hơn sự nhanh chậm của viên bi tại thời điểm x_0. Từ đó, người ta xem giới hạn của tỉ số $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ khi x_1 dần đến x_0 là vận tốc túc thời tại thời điểm x_0 của viên bi, kí hiệu là $v(x_0)$. Nói cách khác, $v(x_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Giá trị $v(x_0)$ gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ tại điểm x_0.

2. Khái niệm đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0}.

$\Delta x = x - x_0$ và gọi Δx là số gia của biến số tại điểm x_0;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và gọi Δy là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

Khi đó, ta có: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x_0. Tính $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$.

Bước 2. Rút gọn tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tính $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kết luận: Nếu $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a$ thì $f'\left(x_0\right)=a$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tại điểm x = 2 bằng định nghĩa

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x^2$ tại điểm x bất kì bằng định nghĩa

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=-x^2$ có đồ thị $\left(C\right)$.

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm $M(3;-9)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=2x^2$ có đồ thị $\left(C\right)$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ bằng -2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có tung độ bằng 2.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ có hệ số góc bằng 4.

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại x_0. Đạo hàm của $f\left(x\right)$ tại x_0 là:

A. $f\left(x_0\right)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 1$ gọi Δx là số gia của đối số tại x và Δy là số gia tương ứng của hàm số, tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

A. $3x^2 - 3x.\Delta x + (\Delta x)^3$.

B. $3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^2$.

C. $3x^2 + 3x.\Delta x - (\Delta x)^2$.

D. $3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có giá trị đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

A. $f'(0) = 0$

B. $f'(0) = 1$

C. $f'(0) = -2$

D. Không tồn tại

Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:.. Ngày học:....................................

Định lí 1: Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Định lí 2: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Định lí 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình chữ nhật. Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$.

Câu 2. Cho hình chóp S.ABC có cạnh SA bằng a, đáy ABC là tam giác đều với cạnh bằng a. Cho biết hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính SB và SC theo a.

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a với tâm $O, SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông cân tại S. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a) $SM \perp (ABCD)$;

b) $AD \perp (SAB)$;

c) $(SAD) \perp (SBC)$

Câu 5. Tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD). Trong tam giác BCD vẽ đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng:

a) (ADC) ⊥ (ABE) và (ADC) ⊥ (DFK).

b) OH ⊥ (ADC).

Câu 6. Cho lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, hai mặt phẳng $\left(A'AB\right)$ và $\left(A'AC\right)$ cùng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh rằng $AA' \perp (ABC)$.

b) Tính số đo góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC).

BTVN

Câu 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh rằng (SBC) ⊥ (SAC).

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng (ABI) ⊥ (SAC).

Thầy Trần Ngọc Hà