

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Câu 12. Giải hệ
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 2y + 1 \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 2x + 1 \end{cases}$$

HD:

2) Trừ theo vế các phương trình (1) và (2) ta được:

$$(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}) + 3(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ hoặc } \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 3 = 0 \quad (*)$$

Trường hợp 1: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thay $y = x$ vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = (x + 1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $x = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

Trường hợp 2: $\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 3 = 0$.

$$\text{Xét } A = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 3 = \frac{(3\sqrt{x^2 + 1} + x) + (3\sqrt{y^2 + 1} + y)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$$

Ta có: $3\sqrt{x^2 + 1} + x > 3\sqrt{x^2} + x = 3|x| + x = 2|x| + (|x| + x) \geq 0$.

Tương tự: $3\sqrt{y^2 + 1} + y > 0$

Suy ra: $A > 0$. Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x = y = 0$.

Cách 2 :

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 2y + 1 \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 2y - x + 1 \\ \sqrt{y^2 + 1} = 2x - y + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - x + 1 \geq 1 & (1) \\ 2x - y + 1 \geq 1 & (2) \\ x^2 + 1 = 4y^2 + 4y + 1 - 4xy - 2x + x^2 & (3) \\ y^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 4xy - 2y + y^2 & (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế các phương trình (3) và (4) ta được phương trình :

$$(x - y)[4(x + y) + 6] = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } 4(x + y) + 6 = 0 :$$

Cộng theo vế các bất phương trình (1) và (2) ta được : $x + y \geq 0$, suy ra trường hợp $4(x + y) + 6 = 0$ không xảy ra.

Trường hợp $x = y$, thay vào (3) ta được: $x = y = 0$.