

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

Ca 1

Câu 4. Tìm tất cả các số x, y nguyên dương, p nguyên tố thỏa mãn: $x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p$.

HD:

Vì $12p:3$ nên $x^2 - 3xy + p^2y^2:3$ mà $3xy:3$ nên $x^2 + p^2y^2:3$

Kết hợp với tính chất 1 số chính phương chỉ chia 3 dư 0 hoặc 1 nên nếu tổng 2 chính phương chia hết cho 3 thì cả 2 số chia hết cho 3. Từ đó x^2 và p^2y^2 là 2 bình phương chia hết cho 3.

Vì 3 là số nguyên tố nên x^2 và $p^2y^2:9$.

Mà $x^2:9$ nên $x:3$ từ đó $3xy:9$.

$$\Rightarrow x^2 - 3xy + p^2y^2:9$$

Ta có $12p = 4.3p$ mà $\text{UCLN}(4,9) = 1$ nên $3p:9$ từ đó $p:3$ mà p là số nguyên tố nên $p = 3$.

$$\Rightarrow x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p \Rightarrow x^2 - 3xy + 9y^2 = 36$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $x^2 + 9y^2 \geq 6xy \forall x, y$

$$\Rightarrow x^2 - 3xy + 9y^2 \geq 6xy - 3xy = 3xy \Rightarrow 36 \geq 3xy \Rightarrow 12 \geq xy$$

Mà x, y là số nguyên dương nên $x.y \geq 1$ nên $12 \geq xy \geq x.1 = x$

Ta có $x^2 - 3xy + 9y^2$ chẵn mà đây là tổng 3 số nguyên nên tồn tại 1 số chẵn

Nếu x chẵn $\Rightarrow x^2 - 3xy$ chẵn $\Rightarrow 9y^2$ chẵn mà $\text{UCLN}(9,2) = 1$ nên y chẵn.

Chứng minh tương tự với y . Từ đó suy ra cả x và y đều chẵn, kết hợp với $12 \geq x, x:3$ và x nguyên dương

$\Rightarrow x \in \{6, 12\}$ thay x vào $x^2 - 3xy + 9y^2 = 36$ ta tìm được các cặp (x, y) là $(6, 0); (6, 2); (12, 6)$

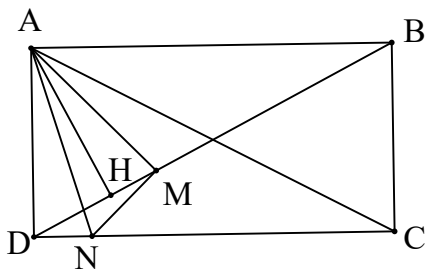
Vậy các cặp (x, y, p) cần tìm là $(6, 0, 3); (6, 2, 3); (12, 6, 3)$.

Ca 2

Câu 10. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Gọi M, N theo thứ tự là

các điểm trên BH và CD sao cho $\frac{BM}{BH} = \frac{CN}{CD}$. Chứng minh rằng $AM \perp MN$.

HD:



Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACD$ có: $\widehat{AHB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$; $\widehat{ABH} = \widehat{ACD}$ (tính chất hình chữ nhật)

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ACD (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CD}. \quad (1)$$

Theo đề bài $\frac{BM}{BH} = \frac{CN}{CD} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{BH}{CD}. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN}.$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN}$; $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle ACN (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \text{ và } \widehat{BAM} = \widehat{CAN} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{MAN}.$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ có: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{MAN}$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMN (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMN}.$$

Mà $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên $\widehat{AMN} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MN$ (đpcm).