TÀI LIỆU TOÁN LỚP 12
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Câu 43: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(b-2)(b-6+\log_2 a)<0$?

A. 67. **B.** 64. **C.** 65. **D.** 66.

HD:

Chọn A

TH1: $\begin{cases} b<2 \\ b-6+\log_2 a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<2 \\ b>\log_2 \dfrac{64}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{64}{a}<b<2$.

Để có đúng hai số nguyên b thỏa mãn thì $-1\le \log_2 \dfrac{64}{a}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le \dfrac{64}{a}<1 \Leftrightarrow 64<a\le 128$.

Có $128-63+1=66$ số.

TH2: $\begin{cases} b>2 \\ b-6+\log_2 a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b>2 \\ b<\log_2 \dfrac{64}{a} \end{cases} \Leftrightarrow 2<b<\log_2 \dfrac{64}{a}$.

Để có đúng hai số nguyên b thỏa mãn thì $5\le \log_2 \dfrac{64}{a}<6 \Leftrightarrow 32\le \dfrac{64}{a}<64 \Leftrightarrow 1<a\le 2 \Rightarrow a=2$.

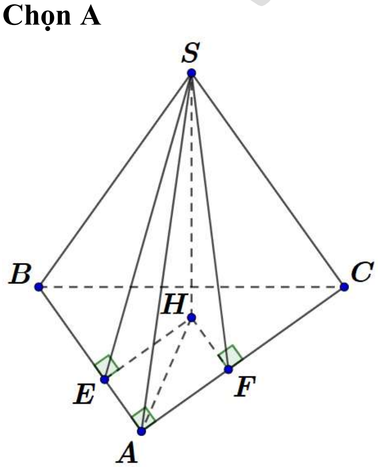
Vậy có 67 số thỏa mãn.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A và $AB=\sqrt{3}$, $AC=\sqrt{7}$, $SA=1$. Hai mặt bên (SAB) và (SAC) lần lượt tạo với mặt đáy các góc bằng $45°$ và $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{7}}{6}$.

HD:

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Kẻ $HE \perp AB, E \in AB$ và $HF \perp AC, F \in AC$.

Ta có $\begin{cases} AB = (SAB) \cap (ABC) \\ SH \perp AB \\ HE \perp AB \\ \Rightarrow SE \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(ABC)) = (EH, ES) = \widehat{HES} = 45° \left(\widehat{SHE} = 90°\right)$

$\Rightarrow \Delta SHE$ vuông cân $\Rightarrow EH = SH$.

Ta có $\begin{cases} AC = (SAC) \cap (ABC) \\ SH \perp AC \\ HF \perp AC \\ \Rightarrow SF \perp AC \end{cases} \Rightarrow ((SAC),(ABC)) = (SF, FS) = \widehat{HFS} = 60° \left(\widehat{SHF} = 90°\right)$

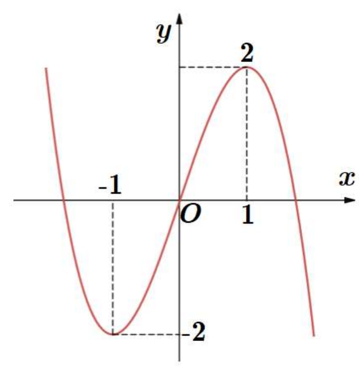
ΔSHF vuông nên $HF = \dfrac{HS}{\tan \widehat{SHF}} = \dfrac{HS}{\tan 60°} = \dfrac{HS}{\sqrt{3}}$.

Mà tứ giác $HEAF$ là hình chữ nhật $AH = EF^2 = \sqrt{HE^2 + HF^2} = \dfrac{2SH\sqrt{3}}{3}$.

Ta có tam giác SHA vuông tại H $SA^2 = SH^2 + HA^2 = \dfrac{7}{3}SH^2 \Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{21}}{7}SA = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{6}SH.AB.AC = \dfrac{1}{6}\dfrac{\sqrt{21}}{7}\sqrt{3}\sqrt{7} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 46: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Có bao giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2023]$ để hàm số $y = \left|\dfrac{mf(x) + 100}{f(x) + m}\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 1974. **B.** 1923. **C.** 1973. **D.** 2013

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{mf(x) + 100}{f(x) + m}$

Ta có $g'(x) = \dfrac{m^2 - 100}{[f(x) + m]^2} f'(x)$

Với $m = \pm 10$ thì hàm số $g(x)$ là hàm hằng nên $y = |g(x)|$ là hàm hằng nên loại $m = \pm 10$.

Với $m \neq \pm 10$, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Do đó $g(x)$ có hai điểm cực trị. Nên để hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow mf(x) + 10 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm nên loại $m = 0$.

Với $m \neq 0$, phương trình $\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{-100}{m}$.

Để $f\left(x\right)=\dfrac{-100}{m}$ có ba nghiệm $\Leftrightarrow -2<\dfrac{-100}{m}<2$, mà $m \in \left[0;2023\right]$ nên $m>50$.

$\Rightarrow m \in \left\{51;52;...;2023\right\}$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt?

A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 18.

HD:

Chọn C

Ta có: $4f\left(x^2-4x\right)=m \Leftrightarrow 4f\left(u\left(x\right)\right)=m$, với $u\left(x\right)=x^2-4x$.

Đặt $g\left(x\right)=4f\left(u\left(x\right)\right)$.

Phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ và đường thẳng $y=m$ có ít nhất ba điểm chung phân biệt.

x	0			2							$+\infty$
$u(x)$	0		-2	-4		-2		0			$+\infty$
$g(x)$	-12	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	-12	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình $4f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi $-12<m\leq 8$, mà m nguyên nên $m=-11,-10,...,8$.

Câu 49: Kí hiệu S là tập tất cả số nguyên m sao cho phương trình $3^{x^2+mx+1}=\left(3+mx\right)3^{9x}$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;9)$. Số phần tử của S là?

A. 11. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 12.

HD:

Chọn A

$3^{x^2+mx+1}=(3+mx)3^{9x}\Leftrightarrow 3^{x^2+mx+1-9x}-(3+mx)=0\,(1)$

Để phương trình có nghiệm $3+mx>0$ (do $3^{x^2+mx+1-9x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$)

Khi đó, $3+mx>0\Leftrightarrow m>\dfrac{-3}{x}\Leftrightarrow m>-3\,(do\ 1<x<9)$

Xét hàm số $f(x)=3^{x^2+mx+1-9x}-(3+mx)$

Đạo hàm: $f'(x)=\ln 3.(2x+m-9)3^{x^2+mx+1-9x}-m$

Đạo hàm cấp 2: $f''(x)=\ln 3.2.3^{x^2+mx+1-9x}+(\ln 3.(2x+m-9))^2\,3^{x^2+mx+1-9x}>0$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Mặt khác $x=0$ là một nghiệm của phương trình (1) nên để phương trình này có nghiệm $x\in(1;9)$ thì (1) phải có đúng một nghiệm $x\in(1;9)$

$\Rightarrow f(1).f(9)<0\Leftrightarrow(3^{m-7}-3-m)(3^{1+m}-3-9m)<0$

Giải ra ta được $m\in\{-2;-1;1;....;9\}$ có 11 giá trị.

Câu 50: Xét tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$, ở đó $a\ge b$ sao cho ứng với mỗi cặp số như vậy có đúng 50 số nguyên dương x thỏa mãn $|\ln a-\ln x|<\ln b$. Hỏi tổng $a+b$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. 22. **B.** 36. **C.** 11. **D.** 50.

HD: **Chọn A**

Khi $b=1$ $\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm $\Rightarrow b\ge 2$

Ta có $|\ln a-\ln x|<\ln b\Leftrightarrow -\ln b<\ln a-\ln x<\ln b\Leftrightarrow \ln a-\ln b<\ln x<\ln a+\ln b$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}<\ln x<\ln ab\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}<x<ab$.

Nhận xét: Nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình là $x=ab-1$ khi đó yêu cầu bài toán trở thành nghiệm nguyên dương bé nhất của bất phương trình là $x=ab-50$ hay

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}<ab-50\\ \dfrac{a}{b}\ge ab-51\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<ab^2-50b\\ a\ge ab^2-51b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}50b<a(b^2-1)\\ 51b\ge a(b^2-1)\end{cases}$$

Do $a\ge 1\Rightarrow 51b\ge b^2-1\Rightarrow 2\le b\le 50$ (1)

Khi đó $\begin{cases}a>\dfrac{50}{b^2-1}\\ a\le\dfrac{51}{b^2-1}\end{cases}$

Lại có $a\ge b\Rightarrow\dfrac{51b}{b^2-1}\ge b\Rightarrow b\le 7$

Kết hợp với $(1)\Rightarrow 2\le b\le 7$ thử trực tiếp ta tìm được với $b=3;a=19$ thì $a+b=22$ và là nhỏ nhất.