TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Ca 1

Câu 1. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $2n^2+n+8$ không phải là số chính phương.

HD: Từ giả thiết $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3, ta có $n \equiv 1 (\bmod 3)$. Như vậy:

$2n^2+n+8 \equiv 2+1+8 \equiv 2 (\bmod 3)$

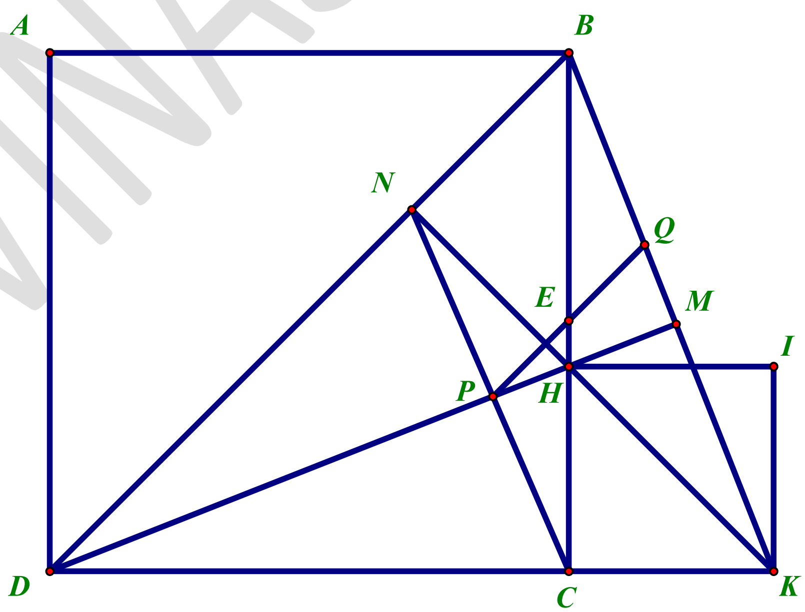
Không có số chính phương nào chia 3 dư 2 và bài toán được chứng minh.

Ca 2

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm H thuộc cạnh BC (H không trùng với B và C). Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa hình vuông $ABCD$ dựng hình vuông CHIK. Gọi M là giao điểm DH và BK; N là giao điểm KH và BD.

3) Gọi P là giao điểm của CN và DH. Qua P kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC, BK lần lượt tại E, Q. Chứng minh E là trung điểm của PQ.

HD:



1. Vì các tứ giác ABCD, CHIK là các hình vuông nên D, C, K thẳng hàng và

$\widehat{BDC}=45°; \widehat{CKH}=45° \Rightarrow \widehat{BDC}+\widehat{CKH}=90° \Rightarrow KH \perp BD$

Tam giác BKD có $BC \perp KD; KH \perp BD$ nên H là trực tâm . $\Rightarrow DH \perp BK$

Xét tam giác DNK và tam giác DCB có :

$$\begin{cases} \widehat{NDK}: \text{chung} \\ \widehat{DNK} = \widehat{DCB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta DNK \sim \Delta DCB (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{DK}{DB} \Leftrightarrow DN.DB = DC.DK$$

2. Ta có : $\frac{BH}{HC} = \frac{BH.DC}{HC.DC} = \frac{BH.CK}{HC.CK} = \frac{2S_{BHD}}{2S_{DHC}} = \frac{2S_{BHK}}{2S_{CHK}} = \frac{S_{BHD} + S_{BHK}}{S_{DHK}}$

Tương tự : $\frac{DH}{HM} = \frac{S_{BHD} + S_{DHK}}{S_{BHK}}$; $\frac{HK}{HN} = \frac{S_{BHK} + S_{DHK}}{S_{BHD}}$

Suy ra: $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} = \left(\frac{S_{BHD}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHD}}\right) + \left(\frac{S_{BHK}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHK}}\right) + \left(\frac{S_{BHD}}{S_{BHK}} + \frac{S_{BHK}}{S_{BHD}}\right)$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có : $\frac{S_{BHD}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHD}} \geq 2; \frac{S_{BHD}}{S_{BHK}} + \frac{S_{BHK}}{S_{BHD}} \geq 2;$

$\frac{S_{BHK}}{S_{DHK}} + \frac{S_{DHK}}{S_{BHK}} \geq 2$ .Do đó : $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} \geq 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_{BHD} = S_{BHK} = S_{DHK} \Leftrightarrow DC = CK$

(vô lí vì $DC = BC > CK$). Dấu bằng không xảy ra .

Vậy $\frac{BH}{HC} + \frac{DH}{HM} + \frac{KH}{HN} > 6$ (đpcm)

3. Xét tam giác DNC và tam giác DKB có :

$$\begin{cases} \widehat{NDC}: \text{chung} \\ \frac{DN}{DK} = \frac{DC}{DB} (\text{vì } DN.DB = DC.DK) \end{cases} \Rightarrow \Delta DNC \sim \Delta DKB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{DCN} = \widehat{DBK}.$$

Tương tự $\widehat{KCM} = \widehat{KBD}. \Rightarrow \widehat{DCN} = \widehat{KCM} \Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{MCB}$

Suy ra CH là đường phân giác trong, CD là đường phân giác ngoài của tam giác PCM (vì $DC \perp CH$).

$$\Rightarrow \frac{HP}{HM} = \frac{DP}{DM}\left(= \frac{CP}{CM}\right)$$ (tính chất đường phân giác trong tam giác PCM).

$\Rightarrow \frac{DM}{HM} = \frac{DP}{HP} = \frac{DM + DP}{HM + HP} = \frac{2DM - PM}{PM} = \frac{2DM}{PM} - 1 \quad (1)$

Mặt khác $\frac{DP}{HP} = \frac{DH - HP}{HP} = \frac{DH}{HP} - 1 \quad (2)$

Từ (1), (2) Suy ra: $\frac{2DM}{PM} = \frac{DH}{HP} \quad \Leftrightarrow \frac{HP}{HD} = \frac{1}{2}.\frac{MP}{MD} (3)$

Áp dụng định lí ta-lét vào các tam giác BHD, BMD ta có:

$\frac{HP}{HD} = \frac{PE}{BD}; \quad \frac{MP}{MD} = \frac{PQ}{BD} (4)$

(3), (4) $\Rightarrow \frac{PE}{BD} = \frac{1}{2}.\frac{PQ}{BD} \Leftrightarrow PQ = 2PE$, suy ra E là trung điểm của PQ.