TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
SỐ CHÍNH PHƯƠNG (tiếp) - BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI (tiếp)

Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

SỐ CHÍNH PHƯƠNG (tiếp)

Câu 1. Cho ba 3 số hữu tỉ x, y, z khác 0 thỏa mãn: $xyz = 1$ và $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}=\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}$. Chứng minh rằng trong 3 số x, y, z phải có 1 số bằng bình phương của số còn lại.

Câu 2. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ sao cho $(a+b+c)^2-2a+2b$ là số chính phương

Câu 3. Tìm các số nguyên tố p để $2^p+5\cdot 3^p$ là số chính phương.

BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI (tiếp)

Câu 1. Cho $\frac{2x^2}{1+x^2}=y$, $\frac{2y^2}{1+y^2}=z$, $\frac{2z^2}{1+z^2}=x$. Chứng minh $x=y=z$.

Câu 2. Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le 2(a+b+c)$.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}$.

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện ab+bc+ca = 3abc. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

Câu 5. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$

Câu 6. Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn ab + bc + ca = 3abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{3}{2}$$

Câu 7. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}$.

Câu 8. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a\ge 1; b\ge 1$, chứng minh $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$.

Câu 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ca=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{bc(a+1)}+\frac{b}{ca(b+1)}+\frac{c}{ab(c+1)}.$$

Câu 10. Cho hai số $x,y>0$ và $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)$

Thầy Trần Ngọc Hà

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
ÔN TẬP HỌC KÌ 2
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Câu 1. Cho $\widehat{xAy}=90^\circ$. Một điểm O cố định trên tia Ay, điểm C di động trên tia Ax, vẽ ΔCOB vuông ở O sao cho $OC=2OB$. Gọi E và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của O và B trên tia BC và Ay

a) Chứng minh CA.DB = AO.DO

b) $\Delta ACE \sim \Delta DOE$.

c) Tính $\dfrac{OB^2}{BC^2}$. Nếu $S_{\vartriangle AED}=9\,cm^2$, tính EA, ED

d) Chứng minh khi C di động trên tia Ax thì B di động trên một tia cố định.

Câu 2. Cho ΔABC, các đường cao cắt nhau tại H. Gọi S là diện tích ΔABC. Chứng minh rằng:

$AB^2+HC^2=BC^2+AH^2=AC^2+HB^2$ và $AB\cdot HC+BC\cdot HA+AC\cdot HB=4S.$

Câu 3. Cho đoạn thẳng $AB=2a$, trung điểm I. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Lấy $C\in Ax, D\in By$ sao cho $AC\cdot BD=a^2$.

a) Chứng minh $\vartriangle ICD$ vuông và $\vartriangle ICD$ cs $\vartriangle AIC$.

b) Hạ $IH\perp CD(H\in CD)$. Chứng minh $\vartriangle HAB$ vuông.

c) Hạ $HK\perp AB(K\in AB)$. Chứng minh AD, BC, HK đồng quy

d) Tìm vị trí của C để diện tích tứ giác ACDB có giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\hat{B}$ và $\hat{C}$ nhọn, đường cao AF, trung tuyến AD, phân giác AE. Biết

$S_{\Delta AED}=\dfrac{1}{14}S_{\Delta ABC}$ và $S_{\Delta AFD}=\dfrac{7}{50}S_{\Delta ABC}$. Tính $\widehat{BAC}$.

Câu 5. Cho ΔABC biết $\hat{B}$ có số đo bằng 2 lần $\hat{C}$.

a) Chứng minh rằng $\hat{C}\le 60^\circ$. Tìm điều kiện của C để ΔABC không có góc nào tù.

b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho $BK=BC$. Chứng minh $\Delta ABC\sim\Delta ACK$ và ta có hệ thức $AC^2-AB^2=AB\cdot BC$.

c) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AC^2-AB^2=AB\cdot BC$ là $\hat{B}=2\hat{C}$.

d) Kẻ AP, AH lần lượt vuông góc với CK và BC, AP cắt BC tại I. Chứng minh $HA^2=HI.HC$.

Câu 6. Cho ΔABC vuông tại A có $CB=2AC$. Lấy điểm M bất kì trên cạnh AB, hạ BH vuông góc xuống tia CM. Gọi K là giao điểm của BH và tia CA

a) Chứng minh MA.M B = MH.MC

b) Tính $\widehat{AHC}$

c) Tia KM cắt BC ở P, chứng minh rằng $BH.BK + CA.CK$ không đổi.

d) Lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $\widehat{KEC} = 90^\circ$ và điểm F trên cạnh CH sao cho $\widehat{KFB} = 90^\circ$. Chứng minh $\triangle KFE$ cân.

Câu 7. Cho ΔABC vuông ở A có $AB = 10\,cm, AC = 24\,cm$, đường cao AH.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH

b) Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại hai điểm M và N. Gọi O là giao điểm của MC và NB. Tia Ny song song AB cắt MC tại F, tia Mx song song AC cắt BN tại điểm E. Chứng minh rằng $ON^2 = OB.OE$.

c) Chứng minh $EF//BC$.

d) Chứng minh $MN^2 = EF \cdot BC$.

Câu 8. Cho ΔABC vuông tại $A(AB < AC)$, kẻ đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại O.

a) Chứng minh O là trung điểm của BC

b) Kẻ đường thẳng d vuông góc với AO tại A, cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh $\frac{BK}{BH} = \frac{CK}{CH}$.

c) Chứng minh: $AH^2 = HB \cdot HC$ và $AD \cdot BD + AE \cdot EC = AH^2$.

d) Gọi I, J lần lượt là giao điểm HD, HE với đường thẳng d. Chứng minh $BI//CJ$.

Câu 9. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH, lấy M là điểm đối xứng với H qua AB, lấy N là điểm đối xứng với H qua AC. Gọi E là giao điểm của MH với AB và F là giao điểm của NH với AC, đường thẳng MN cắt AB, AC theo thứ tự tại I, K

a) Chứng minh tam giác AMN cân

b) Chứng minh AE.AB = AF. AC và chứng minh $\Delta AIK \sim \Delta ACB$

c) Chứng minh: HA là phân giác góc IHK và chứng minh các đường thẳng AH ; BK ; CI đồng quy tại J

d) Chứng minh: $BJ.BK + CJ.CI = BC^2$.

Thầy Trần Tuấn Việt