ÔN THI VÀO 10 MÔN TOÁN
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:...Ngày học:..

Câu 5. Cho các số thực a,b,c thay đổi luôn thỏa mãn: $a \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

HD:

+ Tìm giá trị nhỏ nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \ge 2ab \\ b^2+c^2 \ge 2bc \\ c^2+a^2 \ge 2ca \end{cases} \Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

$$\Rightarrow P = a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca = 9$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \ge 1 \\ ab+bc+ca=9 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

+ Tìm giá trị lớn nhất.

Vì $\begin{cases} a \ge 1 \\ b \ge 1 \\ c \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) \ge 0 \\ (b-1)(c-1) \ge 0 \\ (c-1)(a-1) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab-a-b+1 \ge 0 \\ bc-b-c+1 \ge 0 \\ ca-c-a+1 \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow ab+bc+ca-2(a+b+c)+3 \ge 0$$

$$\Rightarrow 3 \le a+b+c \le \frac{ab+bc+ca+3}{2} = 6$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \le 36$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \le 36$$

$$\Rightarrow P \le 36 - 2(ab+bc+ca) = 18$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4, b=c=1 \\ b=4, c=a=1 \\ c=4, a=b=1 \end{array}\right.$.

Vậy GTNN của P là 9, xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

GTLN của P là 18, xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a=4, b=c=1 \\ b=4, c=a=1 \\ c=4, a=b=1 \end{array}\right.$.

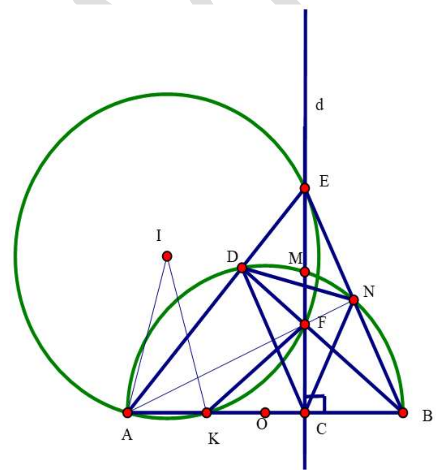
Câu 3. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại C, cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M. Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại F, tia BN cắt cắt đường thẳng d tại E. Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

a) Chứng minh: AD.AE = AC.AB.

b) Chứng minh: Ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN.

c) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB.

HD: a, $\Delta ADB \sim \Delta AEC$ (g.g)



$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AC.AB$

b, Có AN ⊥ BN (Vì $\widehat{ANB} = 90^0$ theo tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Có AD⊥ BD (Vì $\widehat{ADB} = 90^0$ theo tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Vậy F là trực tâm ΔAEB suy ra BF ⊥ AE

mà BD ⊥ AE suy ra 3 điểm B, F, D thẳng hàng.

c,

$\Delta FAC \sim \Delta BEC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FC}{BC} = \dfrac{AC}{EC}$

$\Rightarrow FC.EC = AC.BC$ (1)

ΔCFK ~ Δ CAE $\Rightarrow \dfrac{FC}{CA} = \dfrac{CK}{EC} \Rightarrow FC.CE = CA.CK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BC = CK suy ra K cố định

Mà IA = IK suy ra I thuộc trung trực của A K là đường thẳng cố định.

Cách 2 : Gọi giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với AB là K $\Rightarrow$ tứ giác AEFK là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{FKB}$ (Cùng bù với $\widehat{AKF}$) . (6)

Lại có $\widehat{AEC} = \widehat{FBK}$ (Cùng phụ với $\widehat{EAB}$) (7)

Từ (6) và (7) ta có $\widehat{FKB} = \widehat{FBK} \Rightarrow \Delta FKB$ là tam giác cân tại F. Mà FC vuông góc với KB nên FC là đường cao đồng thời là trung trực của BK nên C là trung điểm của KB tức là BC = CK.

Có B, C cố định nên BC có độ dài không đổi $\Rightarrow$ CK có độ dài không đổi, K thuộc đường kính AB cố định nên K là điểm cố định

Mà IA = IK nên I thuộc đường trung trực của đoạn AK . Mà AK cố định nên trung trực của AK là đường thẳng không đổi.

Vậy : Điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB