ÔN THI VÀO 10 MÔN TOÁN
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Câu 8. Cho đường tròn tâm O, bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Một điểm P di chuyển trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) (P khác A, C). Tiếp tuyến tại P của đường tròn (O) cắt các đường thẳng AB, CD lần lượt tại E, F. Nối DP cắt AB tại G.

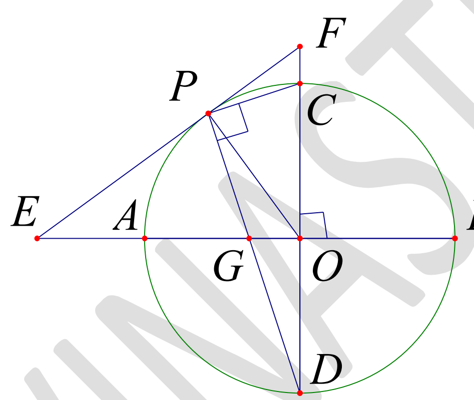
a) Chứng minh rằng 4 điểm O, G, P, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng tam giác EPG cân tại E.

c) Trong trường hợp PE = 5PF, tính diện tích tam giác OEF theo R.

d) Chứng minh rằng khi điểm P di chuyển, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG luôn thuộc một đường thẳng cố định.

HD:



a. Chứng minh rằng 4 điểm O, G, P, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{COG} = 90^0$ (vì $AB \perp CD$ tại O)

Xét (O) có: $\widehat{CPD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên: $\widehat{CPG} = 90^0$.

Tứ giác O, G, P, C có $\widehat{COG} + \widehat{CPG} = 180^0$ mà hai góc này đối nhau nên tứ giác OGPC nội tiếp
Vậy 4 điểm O, G, P, C cùng thuộc một đường tròn.
b. Chứng minh rằng tam giác EPG cân tại E.

Ta có $\widehat{EPD} = \widehat{PCD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dậy cung và góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) (1)

Mặt khác: $\widehat{PCD} + \widehat{PGO} = 180^0$ (vì tứ giác OGPC nội tiếp)

Mà $\widehat{PGE} + \widehat{PGO} = 180^0$ (kề bù)

Nên $\widehat{PCD} = \widehat{PGE}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{EPD} = \widehat{PGE}$. Hay tam giác EPG cân tại E.

c. Trong trường hợp PE = 5PF, tính diện tích tam giác OEF theo R.

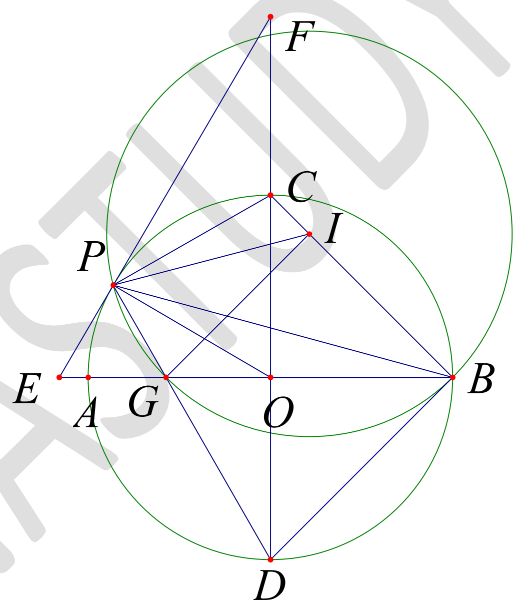
Tam giác OEF vuông tại O, đường cao OP. Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có: $OP^2 = PE \,.\, PF \Leftrightarrow R^2 = 5\,PF^2 \Leftrightarrow PF = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow PE = 5.\dfrac{R}{\sqrt{5}} = R\sqrt{5}$

$\Rightarrow EF = \dfrac{R}{\sqrt{5}} + R\sqrt{5} = \dfrac{6\sqrt{5}R}{5}$

Diện tích tam giác OEF là: $S_{\Delta OEF} = \dfrac{1}{2}\,OP.EF = \dfrac{1}{2}.R.\dfrac{6\sqrt{5}R}{5} = \dfrac{3\sqrt{5}R^2}{5}$ (đvdt)

d. Chứng minh rằng khi điểm P di chuyển, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG luôn thuộc một đường thẳng cố định.



Khi điểm P trùng với điểm C thì điểm G trùng với điểm O.

Khi đó tam giác BPG trùng với tam giác OBC. Lúc này tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG là trung điểm của BC

Khi điểm P trùng với điểm A thì tâm là C.

Ta dự đoán tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG nằm trên BC

Chứng minh: gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG

Ta có $\widehat{DBG} = \widehat{DPB}$ (Vì DA = DB)

Do đó DB là tiếp tuyến của đường tròn tâm I. Hay $DB \perp IB$

Mặt khác $BD \perp BC$ (góc CBD nội tiếp nửa đường tròn tâm O)

Nên B, I, C thẳng hàng.

Vậy khi điểm P di chuyển, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=(a+1)^2+\left(\dfrac{a^2}{a+1}+2\right)^2 .\forall a\neq -1$

HD:

$$\frac{a^2}{a+1}+2=\frac{a^2+2a+2}{a+1}=\frac{(a+1)^2+1}{a+1}=a+1+\frac{1}{a+1}$$

Đặt $x=a+1\ (x\neq 0)$

Suy ra $A=x^2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=2x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$2x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{2x^2.\frac{1}{x^2}}=2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x^2=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^4=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Do đó: $A\geq 2+2\sqrt{2}$. Với $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\Rightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-1$

Vậy GTNN của A là $2+2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-1$ hoặc $a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+1$