

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  
**HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 2.** Cho số thực  $x$  khác 0 thỏa mãn  $x + \frac{2}{x}$  và  $x^3$  đều là số hữu tỉ. Chứng minh  $x$  là số hữu tỉ.

**HD:**

Ta có  $x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$  suy ra  $x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q}$ .

Cùng có  $x^3 \in \mathbb{Q}$  suy ra  $\frac{8}{x^3} \in \mathbb{Q}$  suy ra  $x^3 - \frac{8}{x^3} = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + 2 + \frac{4}{x^2}\right) \in \mathbb{Q}$

Do  $x^2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 2 \in \mathbb{Q}$  nên suy ra  $x - \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$ .

Vậy  $2x = \left(x + \frac{2}{x}\right) + \left(x - \frac{2}{x}\right) \in \mathbb{Q}$  suy ra  $x \in \mathbb{Q}$  (điều phải chứng minh)

**Câu 4.** Cho  $A$  là một tập hợp con có 100 phần tử của tập hợp  $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$

1) Chứng minh  $A$  chứa hai số tự nhiên liên tiếp.

2) Chứng minh với mọi số tự nhiên  $n$  thuộc tập hợp  $\{2, 3, 4, \dots, 22\}$ , tồn tại hai phần tử của  $A$  có hiệu bằng  $n$ .

**HD:**

1) Gọi các phần tử của tập  $A$  là  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}\}$ . Không mất tính tổng quát giả sử

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$$

Giả sử tập  $A$  không có hai số tự nhiên nào liên tiếp thì ta có

$$a_2 - a_1 \geq 2; a_3 - a_2 \geq 2; \dots; a_{100} - a_{99} \geq 2$$

Suy ra  $a_{100} = a_{100} - a_{99} + \dots + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1 \geq 99 \cdot 2 + a_1 > 178$  vậy  $a_{100}$  không thuộc tập hợp  $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$  (trái với giả thiết) suy ra điều giả sử là sai từ đó ta có điều phải chứng minh.

2) Với  $n \in \{2, 3, 4, \dots, 22\}$  giả sử không tồn tại hai phần tử nào của  $A$  có hiệu bằng  $n$  (\*).

Ta có  $a_i \neq a_j + kn \quad (k \in \mathbb{N}) \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

Với các phần tử  $a_1, a_2, a_3, a_{12}$

Ta có  $a_1 \leq 79$  khi đó tập  $A$  không thể có các phần tử có dạng  $a_1 + kn \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

Xét bất phương trình  $a_1 + k.n \leq 178 \Rightarrow k \geq \frac{178 - a_1}{n} \geq \frac{99}{22} > 4$

Vậy ít nhất có 4 số thuộc tập  $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$  không thuộc  $A$ .

Tương tự như vậy với  $a_2, a_3, \dots, a_{12}$  mỗi trường hợp cũng có ít nhất có 4 số thuộc tập  $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$  không thuộc  $A$  (các số bỏ đi trong các trường hợp là khác nhau).

Với các phần tử  $a_{13}, a_{14}, a_{15}, \dots, a_{34}$

Ta có  $a_{13} \leq 91$  khi đó tập  $A$  không thể có các phần tử có dạng  $a_{13} + k.n$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

Xét bất phương trình  $a_{13} + kn \leq 178 \Rightarrow k \geq \frac{178 - a_{13}}{n} \geq \frac{87}{22} > 3$

Vậy ít nhất có 3 số thuộc tập  $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$  không thuộc  $A$ .

Tương tự như vậy với  $a_{14}, a_{15}, \dots, a_{34}$  mỗi trường hợp cũng có ít nhất có 3 số thuộc tập  $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$  không thuộc  $A$  (các số bỏ đi trong các trường hợp là khác nhau).

Suy ra tập  $A$  không nhiều hơn  $178 - 114 = 64$  phần tử (trái với giả thiết) vậy điều giả sử (\*) là sai từ đó ta có điều phải chứng minh.