ÔN THI VÀO 10 MÔN TOÁN
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Câu 4. Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O). C ≠ A,B. Tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến tại A,B lần lượt tại P,Q

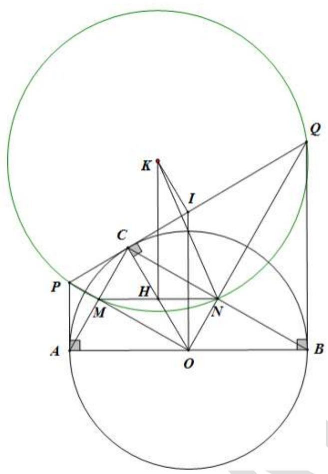
1) Chứng minh: AP.BQ = R^2

2) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ

3) Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC. Chứng minh: PMNQ là tứ giác nội tiếp.

4) Xác đinh vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ có bán kính nhỏ nhất

HD:



1) Vì AP và CP là tiếp tuyến của (O) nên OA ⊥ AP, OC ⊥ PC

Xét tam giác vuông OAP và tam giác vuông OCP có:

$\begin{cases} OP(chung) \\ OA = OC = R \end{cases} \Rightarrow \Delta OAP = \Delta OCP$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \begin{cases} PC = PA (1) \\ POA = POC \Rightarrow POC = \dfrac{1}{2} COA (2) \end{cases}$

Tương tự ta có: $\begin{cases} QC = QB (3) \\ QOC = \dfrac{1}{2} COB (4) \end{cases}$

Từ (2) và (4) ta có: $POQ = POC + QOC = \dfrac{1}{2}(COA + COB) = \dfrac{1}{2}.180^o = 90^o$

⇒ Δ POQ vuông tại O

Từ (1), (3) và áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OPQ ta có: $AP.BQ = CP.CQ = CO^2 = R^2$ (đpcm)

2) Xét tam giác vuông OPQ, gọi I là trung điểm cạnh huyền PQ, khi đó: IP = IQ = IO

⇒ O thuộc đường tròn đường kính PQ (5)

Mặt khác, do AP // BQ nên APQB là hình thang và nhận IO là đường trung bình, suy ra OI // BQ

Mà BQ ⊥ AB ⇒ OI ⊥ AB (6)

Từ (5) và (6) ⇒ AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ tại O.

3) Vì OC = OA = R, PC = PA (cmt) nên PO là trung trực của đoạn AC ⇒ PO ⊥ AC

Tương tự QO ⊥ BC.

Tứ giác OMCN có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật ⇒ OMCN là tứ giác nội tiếp

=> OMN = OCN (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ON) (7)

Mặt khác, do các tam giác OCQ và OCN vuông, suy ra:

OCN = PQO (cùng phụ với CON) (8)

Từ (7) và (8) ⇒ OMN = PQO

Mặt khác OMN + PMN = 180° => PQO + PMN = 180°

⇒ Tứ giác PMNQ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi H, I là trung điểm MN, PQ. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ.

Ta có: KH ⊥ MN và KI ⊥ PQ

Vì OP là trung trực AC (cmt) nên M là trung điểm AC, tương tự N là trung điểm BC.

⇒ MN //AB và MN = $\frac{AB}{2} \Rightarrow HN = \frac{MN}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2}$ (9)

Vì MN // AB, OI ⊥ AB ⇒ MN ⊥ OI. Mà MN ⊥ KH nên OI // KH. Mà KI // HO (cùng vuông góc PQ) nên OIKH là hình bình hành.

$\Rightarrow$ KH = OI $\geq$ OC = R (10)

Bán kính đường tròn (K) là KN. Từ (9) và (10) ta có:

$$KN = \sqrt{KH^2 + HN^2} \geq \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ OI = OC $\Leftrightarrow$ O $\equiv$ C $\Leftrightarrow$ OC $\perp$ AB $\Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa cung AB.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp PMNQ nhỏ nhất khi C là điểm chính giữa cung AB của đường tròn (O).

Câu 6. Cho đường thẳng $(d): y = -2x + m$ và parabol $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$ sao cho $x_1^2 - 2y_2 = 15$.

HD:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P)

Ta có $\frac{-1}{2}x^2 = -2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m = 0\ (1)$.

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P)

Ta có $\Delta' = 4 - 2m$. Để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2\ (*)$

Với $m < 2$ thì (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Ta có $D, E \in (P)$ nên $D\left(x_1; \frac{-1}{2}x_1^2\right), E\left(x_2; \frac{-1}{2}x_2^2\right)$.

Theo Vi – ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 2m \end{cases}$.

Theo đề bài $x_1^2 - 2y_2 = 15. \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 15 \Leftrightarrow 16 - 4m = 15 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $(*)$. Vậy $m = \frac{1}{4}$ thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1^2 - 2y_2 = 15$.