TÀI LIỆU TOÁN LỚP 12
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

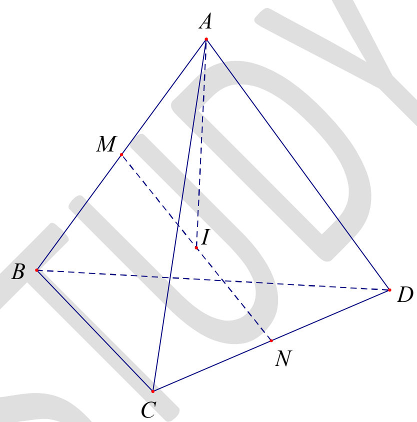
Họ và tên:...Ngày học:..

CA 1

Câu 50. **[Mức độ 4]** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0)$, $B(0;m-1;0)$; $C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC=AD$, $CA=BD$ và $AB=CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải



Đặt $BC=a$; $CA=b$; $AB=c$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Theo giả thiết ta có tam giác $\Delta ABC=\Delta BAD$ $(c.c.c)\Rightarrow CM=DM$ hay tam giác CMD cân tại M $\Rightarrow MN\perp CD$.

Ta có: $\Delta ACD=\Delta BDC$ $(c.c.c)$ suy ra $BN=AN$ suy ra ΔANB cân tại N suy ra $MN\perp AB$.

Gọi I là trung điểm của MN thì $IA=IB$ và $IC=ID$.

Mặt khác ta lại có $AB=CD$ nên $\Delta BMI=\Delta CNI$ $\Rightarrow IB=IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có $IA^2=IM^2+AM^2=\dfrac{MN^2}{4}+\dfrac{AB^2}{4}=\dfrac{MN^2+c^2}{4}$.

Mặt khác CM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên $CM^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$

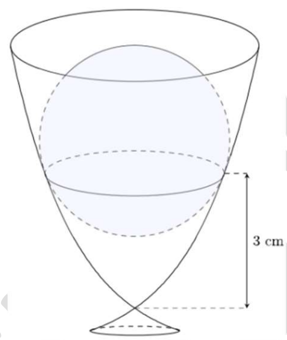
$\Rightarrow MN^2=CI^2-CN^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}-\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

Vậy $IA^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}$ với $a^2+b^2+c^2=2m^2+2(m-1)^2+2(m+4)^2=6(m+1)^2+28$

Vậy $IA^2 = \dfrac{6(m+1)^2+28}{8} \geq \dfrac{7}{2} \Rightarrow IA_{\min} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

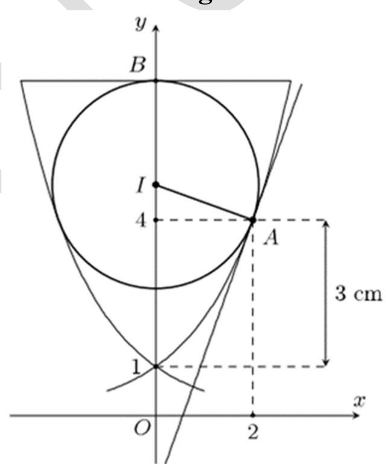
CA 2

Câu 48: Một chiếc ly bằng thủy tinh đang chứa nước bên trong được tạo thành khi quay một phần đồ thị hàm số $y = 2^x$ xung quanh trục Oy. Người ta thả vào chiếc ly một viên bi hình cầu có bán kính R thì mực nước dâng lên phủ kín viên bi đồng thời chạm tới miệng ly. Biết điểm tiếp xúc của viên bi và chiếc ly cách đáy của chiếc ly $3\,cm$. Thể tích nước có trong ly gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?



A. $30\,cm^2$. **B.** $40\,cm^2$. **C.** $50\,cm^2$. **D.** $60\,cm^2$.

Lời giải



Xét mặt phẳng (α) đi qua trục của chiếc ly. Gọi (τ) là đường tròn lớn của quả cầu. Ta thấy đường tròn (τ) và đồ thị $(C): y = 2^x$ tiếp xúc nhau tại A. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta được $A(2;4)$.

Tiếp tuyến với (C) tại A là $(d): y = (4\ln 2).x - 8\ln 2 + 4$.

Đường thẳng vuông góc với (d) tại A là $(\Delta): y = -\dfrac{1}{4\ln 2}.x + \dfrac{1}{2\ln 2} + 4$.

Tâm I của đường tròn (τ) là giao điểm của (Δ) và Oy, ta được $I\left(0; \dfrac{1+8\ln 2}{2\ln 2}\right)$.

Ta có $IA = \left(2; -\dfrac{1}{2\ln 2}\right)$, suy ra thể tích khối cầu $V_{khoi\,cau} = \dfrac{4\pi}{3}.IA^3 \approx 40,26\,cm^3$.

Dung tích chiếc ly là $V=\pi\int_1^{y_B}\left[\log_2 y\right]^2 \mathrm{dy}\approx 69,92\,cm^3$.

Thể tích nước chứa trong chiếc ly là $V_{nuoc}=V-V_{khoi\,cau}\approx 29,66\,cm^3$.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$, trong đó $x=2$ là nghiệm bội chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

+) Xét hàm số $y=g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

$g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=2\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=0\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=1\end{array}\right..$$

Nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

Để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ và $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 6.

+) Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}x^2-6x$.

$h'(x)=x-6$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow x=6$.

Bảng biến thiên:

+) Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y=-m$.

+) Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y=-m+1$.

Mà $-m<-m+1$ nên để hai phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt khác 6 thì $-m>-18$ $\Leftrightarrow m<18$.

Tập các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\{1;...;17\}$.

Tổng tất các giá trị m của tập S là $1+...+17=153$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+16=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S). Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q):2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

A. -15. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -7.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) tâm $I(2;-1;3)$, bán kính $R=\sqrt{21}$.

Ta có: $d(I;(P))=9>\sqrt{21}$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Gọi a, b là các kích thước mặt đáy hình hộp chữ nhật và $d=d(I;(Q))$.

Khi đó, thể tích của khối hộp chữ nhật (H) là

$$V=\left[d(I;(P))+d(I;(Q))\right]ab=(9+d)ab\le(9+d)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=(9+d)(21-d^2).$$

Xét hàm số $f(d)=(9+d)(21-d^2)$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(d)=21-d^2-2d(9+d)=21-18d-3d^2$; $f'(d)=0\Leftrightarrow d=1$.

Từ đó, $V\le f(1)$.

Suy ra thể tích khối hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $d=d(I;(Q))=1$ và $(Q)//(P)$.

Ta có $(Q):2x-y+2z+d=0$.

$$d(I;(Q))=1\Leftrightarrow\frac{|11+d|}{3}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-8\\d=-14\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(Q_1):2x-y+2z-8=0\\(Q_2):2x-y+2z-14=0\end{array}\right..$$

Lấy điểm $N(0;0;-8)\in(P)$. Ta có I và N phải nằm cùng phía với mặt phẳng (Q).

Do đó, ta chọn $(Q):2x-y+2z-14=0$. Từ đó $b+c+d=-13$.