

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI**  
**ÔN TẬP SỐ HỌC**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n$  cho trước, không tồn tại số nguyên dương  $x$  sao cho  $x(x+1) = n(n+2)$

**Câu 2.** Tìm số tự nhiên  $n$  để giá trị của biểu thức  $A = n^3 - 6n^2 + 9n - 2$  là một số nguyên tố.

**Câu 3.** Tìm  $A$  là số nguyên dương, biết trong ba mệnh đề  $P, Q, R$  dưới đây chỉ có duy nhất một mệnh đề sai:

$P = "A + 45$  là bình phương của một số tự nhiên"

$Q = "A$  có chữ số tận cùng là số 7"

$R = "A - 44$  là bình phương của một số tự nhiên"

**Câu 4.** Cho số tự nhiên  $n = 999...9$  (có 2019 chữ số 9). Tính tổng các chữ số của  $n^2$ .

**Câu 5.** Tìm  $x, y$  nguyên dương thỏa mãn:  $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$ .

**Câu 6.** Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n+18$  và  $n-41$  là hai số chính phương.

**Câu 7.** Cho  $x, y, z$  là các số nguyên thỏa mãn:  $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$

Chứng minh:  $x+y+z$  chia hết cho 54.

**Câu 8.** Cho đa thức  $f(x)$ , tìm dư của phép chia  $f(x)$  cho  $(x-1)(x+2)$ . Biết rằng  $f(x)$  chia cho  $x-1$  dư 7 và  $f(x)$  chia cho  $x+2$  dư 1.

**Câu 9.** Với  $a, b$  là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu  $4a^2 + 3ab - 11b^2$  chia hết cho 5 thì  $a^4 - b^4$  chia hết cho 5.

**Câu 10.** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương  $(p; q; n)$ , trong đó  $p, q$  là các số nguyên tố thỏa mãn:  $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ .

Thầy Trần Ngọc Hà

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI**  
**ÔN TẬP HỌC KÌ 2**  
**Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64**

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 4.** Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M, AH cắt BC tại D.

- Chứng minh  $BD^2 = AD \cdot DM$ .
- Kẻ AK vuông góc với EF tại K. Chứng minh  $\triangle AEK$  đồng dạng  $\triangle AHF$ .
- Chứng minh:  $AB \cdot AC = BE \cdot CF + AE \cdot AF$ .

**Câu 5.** Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ( $M \neq B$  và  $C$ ). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho  $BE = CM$ .

- Chứng minh  $\triangle OEM$  vuông cân;
- Chứng minh:  $EM \parallel BN$ ;
- Từ C kẻ  $CH \perp BN$  ( $H \in BN$ ). Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng;
- Cho độ dài đoạn thẳng  $AB = a$  và P, Q lần lượt thuộc cạnh AB, AD sao cho  $\widehat{PCQ} = 45^\circ$ . Chứng minh tam giác APQ có chu vi bằng  $2a$ .

**Câu 6.** Cho tứ giác ABCD có  $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$  và  $AB > AD$ , lấy điểm M trên cạnh AB sao cho  $AM = AD$ . Đường thẳng DM cắt BC tại N. Gọi H là hình chiếu của D trên AC, K là hình chiếu của C trên AN. Chứng minh rằng:

- Chứng minh rằng:  $AM^2 = AH \cdot AC$ ;
- Chứng minh rằng  $\widehat{AHM} = \widehat{AMC}$  và tam giác CDN là tam giác cân;
- Chứng minh rằng:  $\widehat{MHN} = \widehat{MCK}$ .

**Câu 7.** Hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Kẻ CP vuông góc với đường thẳng AB tại P, CQ vuông góc với đường thẳng AD tại Q.

- Chứng minh  $CP \cdot AB = CQ \cdot AD$  và  $\triangle CPQ$  đồng dạng với  $\triangle BCA$ .
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OA. Lấy điểm F trên cạnh AB, sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh  $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$ .
- Xác định vị trí điểm F để tổng  $BE + AK$  có giá trị nhỏ nhất.

**Câu 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ) gọi AD là tia phân giác của góc BAC. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC; E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

a) Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông và  $EF // BC$ .

b) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh  $\triangle ANB$  đồng dạng với  $\triangle NFA$  và H là trực tâm  $\triangle AEF$

c) Gọi P là điểm trên AN, Q là điểm trên AM sao cho  $AP = MQ$ . Tìm vị trí của P và Q để diện tích tứ giác MQPN đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 9.** Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BO và AO. Lấy điểm F di chuyển trên cạnh AB sao cho FM cắt cạnh AB tại E và FN cắt cạnh AD tại K. Qua A và C vẽ các đường thẳng song song với EF cắt BD lần lượt tại I và N.

a) Chứng minh:  $BI = DL$

b) Chứng minh rằng:  $x = -\frac{1}{3}$

c) Xác định vị trí của điểm F trên cạnh AB sao cho

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 10.** Cho hình chữ nhật ABCD, gọi O là giao điểm của AC và BD. Qua điểm A kẻ đường thẳng d vuông góc với AC, đường thẳng d cắt tia CD tại E. Kẻ DK vuông góc với AE (K thuộc AE).

1) Chứng minh: Tam giác KDA đồng dạng với tam giác DAC

2) Chứng minh:  $DA^2 = DC \cdot DE$

3) Gọi P là giao điểm của OE và KD. Chứng minh rằng:  $PK = PD$

4) Chứng minh ba đường thẳng CK, AD, OE cùng đi qua một điểm.

**Câu 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ), đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ là đường cao AH có chứa điểm C, vẽ hình vuông AHKE. Gọi P là giao điểm của AC và KE.

1) Chứng minh tam giác ABP vuông cân.

2) Gọi Q là điểm thứ tư của hình bình hành APQB, I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh ba điểm H, I, E thẳng hàng.

3) Tứ giác HEKQ là hình gì? Vì sao?

**Câu 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong các tam giác ABH, ACH. Gọi M là giao điểm của AI và CK, N là giao điểm của AK và BI. Đường thẳng IK lần lượt cắt AB, AC tại E, F.

1. Chứng minh tam giác AMK vuông cân và  $AM \cdot AI = AN \cdot AK$

2. Gọi O là giao điểm của BI và CK. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, AC. Chứng minh:  $IP // QK$ .

3. Giả sử cạnh  $BC = a$  không đổi. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tam giác AEF có diện tích lớn nhất.

**Câu 13.** Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho  $MB < MA$  và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho  $\widehat{MON} = 90^\circ$ . Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

1) Chứng minh  $\triangle MON$  vuông cân.

2) Chứng minh  $MN // BE$ .

3) Chứng minh  $CK \perp BE$ .

4) Qua K vẽ đường thẳng song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh  $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$ .

**Câu 14.** Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ) có AD là tia phân giác của  $\widehat{BAC}$ . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC, E là giao điểm của BN và DM, F là giao điểm của CM và DN.

a) Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông và  $EF // BC$ .

b) Gọi H là giao điểm của BN và CM. Chứng minh  $\triangle ANB$  đồng dạng với  $\triangle NFA$  và H là trực tâm  $\triangle AEF$

c) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm của BK và AD là I.

Chứng minh:  $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$ .

**Câu 15.** Cho  $\triangle ABC$  vuông ở A có  $AB = 10\text{ cm}$ ,  $AC = 24\text{ cm}$ , đường cao AH.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH

b) Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại hai điểm M và N. Gọi O là giao điểm của MC và NB. Tia Ny song song AB cắt MC tại F, tia Mx song song AC cắt BN tại điểm E. Chứng minh rằng  $ON^2 = OB \cdot OE$ .

c) Chứng minh  $EF // BC$ .

d) Chứng minh  $MN^2 = EF \cdot BC$ .

**Câu 16.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A ( $AB < AC$ ), kẻ đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Đường thẳng qua A vuông góc với DE cắt BC tại O.

a) Chứng minh O là trung điểm của BC

b) Kẻ đường thẳng d vuông góc với AO tại A, cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh  $\frac{BK}{BH} = \frac{CK}{CH}$ .

c) Chứng minh:  $AH^2 = HB \cdot HC$  và  $AD \cdot BD + AE \cdot EC = AH^2$ .

d) Gọi I, J lần lượt là giao điểm HD, HE với đường thẳng d. Chứng minh BI // CJ.

**Câu 17.** Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH, lấy M là điểm đối xứng với H qua AB, lấy N là điểm đối xứng với H qua AC. Gọi E là giao điểm của MH với AB và F là giao điểm của NH với AC, đường thẳng MN cắt AB, AC theo thứ tự tại I, K

a) Chứng minh tam giác AMN cân

b) Chứng minh  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$  và chứng minh  $\triangle AIK \sim \triangle ACB$

c) Chứng minh: HA là phân giác góc IHK và chứng minh các đường thẳng AH ; BK ; CI đồng quy tại J

d) Chứng minh:  $BJ \cdot BK + CJ \cdot CI = BC^2$ .

**Thầy Trần Tuấn Việt**