

TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO – NỀN TẢNG CHUYÊN LỚP 8
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:.....Ngày học:.....

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong các tam giác ABH, ACH. Gọi M là giao điểm của AI và CK, N là giao điểm của AK và BI. Đường thẳng IK lần lượt cắt AB, AC tại E, F.

1. Chứng minh tam giác AMK vuông cân và $AM \cdot AI = AN \cdot AK$
2. Gọi O là giao điểm của BI và CK. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, AC. Chứng minh: $IP // OK$.

HD:

1. Chứng minh tam giác AMK vuông cân và $AM \cdot AI = AN \cdot AK$

Vì AI, AK lần lượt là tia phân giác các góc \widehat{BAH} , \widehat{CAH} nên:

$$\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{KAH} = \frac{\widehat{BAH}}{2} + \frac{\widehat{CAH}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{MAK} = 45^\circ \quad (1)$$

Vì AK, BK lần lượt là tia phân giác các góc \widehat{HAC} , \widehat{HCA} nên:

$$\widehat{AKM} = \widehat{KAC} + \widehat{KCA} = \frac{\widehat{HAC}}{2} + \frac{\widehat{HCA}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \quad (2)$$

Từ 1 và 2 $\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{AKM} = 45^\circ$ Suy ra $\triangle AMK$ vuông cân tại M (đpcm)

Chứng minh tương tự ta cũng có tam giác ANI vuông cân tại N. Suy ra hai tam giác AMK và ANI là các tam giác vuông cân tại M, N.

Hai tam giác vuông AMK và ANI có chung góc nhọn \widehat{MAK} nên đồng dạng với nhau (g.g).

$$\text{Suy ra: } \frac{AM}{AN} = \frac{AK}{AI} \Leftrightarrow AM \cdot AI = AN \cdot AK \text{ (đpcm)}$$

2. Gọi O là giao điểm của BI và CK. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, AC.

Chứng minh: $IP // QK$.

Theo câu 1) $KM \perp AI; IN \perp AK$ nên O là trực tâm của tam giác AIK.

Suy ra: $AO \perp IK$.

Vì BI và CK là các tia phân giác các góc \widehat{ABC} , \widehat{ACB} nên O cũng là giao điểm ba đường phân giác trong tam giác ABC. Suy ra $OP = OQ$.

Tứ giác APOQ có ba góc vuông $\widehat{PAQ} = \widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật APOQ có hai cạnh kề bằng nhau $OP = OQ$ nên là hình vuông.

Suy ra $PQ = OA; PQ \perp OA$ (3)

Xét hai tam giác AMO và KMI có $AM = KM$ (vì tam giác AMK cân tại M),

$\widehat{AMO} = \widehat{KMI} = 90^\circ, MO = MI$ (vì tam giác $\$O M I\$$ vuông cân tại M). $\Rightarrow \Delta AMO = \Delta KMI(c.g.c)$

Suy ra $IK = OA$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $IK = PQ$. Mặt khác $IK \parallel PQ$ (do cùng vuông góc với OA)

Tứ giác IKQP có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên tứ giác IKQP là hình bình hành.

Suy ra: $IP \parallel QK(dp\ cm)$.

Câu 9. Cho hai số thực khác nhau a, b thỏa mãn: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{2}{1+ab}$, Tính giá trị của biểu thức:

$M = \frac{1}{a^{2023}+1} + \frac{1}{b^{2023}+1}$.

Xét: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{b^2+1} - \frac{1}{1+ab} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1+ab-(a^2+1)}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{1+ab-(b^2+1)}{(b^2+1)(1+ab)} = 0 \Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(b^2+1)(1+ab)} = 0 \Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left(\frac{b}{b^2+1} - \frac{a}{a^2+1} \right) = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left(\frac{ba^2+b-(ab^2+a)}{(b^2+1)(a^2+1)} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left(\frac{ba^2+b-ab^2-a}{(b^2+1)(a^2+1)} \right) = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left(\frac{ab(a-b)-(a-b)}{(b^2+1)(a^2+1)} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{1+ab} \cdot \frac{ab-1}{(b^2+1)(a^2+1)} = 0$

TH1: $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ (Loại) vì $a \neq b$

TH2: $ab=1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$ thay vào biểu thức: $M = \frac{1}{a^{2023}+1} + \frac{1}{b^{2023}+1}$

$M = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{2023}+1} + \frac{1}{b^{2023}+1} = \frac{b^{2023}}{b^{2023}+1} + \frac{1}{b^{2023}+1} = \frac{b^{2023}+1}{b^{2023}+1} = 1$.