TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO – NỀN TẢNG CHUYÊN LỚP 8

HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ

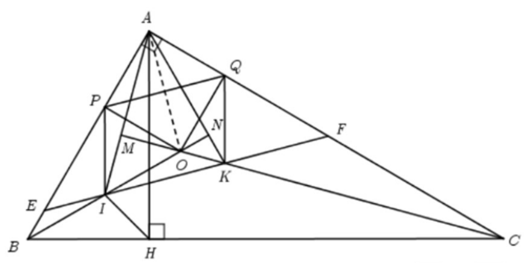
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong các tam giác ABH, ACH. Gọi M là giao điểm của AI và CK, N là giao điểm của AK và BI. Đường thẳng IK lần lượt cắt AB, AC tại E, F.

1. Chứng minh tam giác AMK vuông cân và $AM \cdot AI = AN \cdot AK$

2. Gọi O là giao điểm của BI và CK. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, AC. Chứng minh: IP / /QK .

HD:



1. Chứng minh tam giác AMK vuông cân và $AM \cdot AI = AN \cdot AK$

Vì AI, AK lần lượt là tia phân giác các góc $\widehat{BAH}, \widehat{CAH}$ nên:

$$\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{KAH} = \frac{\widehat{BAH}}{2} + \frac{\widehat{CAH}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{MAK} = 45^\circ \ (1)$$

Vì AK, BK lần lượt là tia phân giác các góc $\widehat{HAC}, \widehat{HCA}$ nên:

$$\widehat{AKM} = \widehat{KAC} + \widehat{KCA} = \frac{\widehat{HAC}}{2} + \frac{\widehat{HCA}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\widehat{MAK} = \widehat{AKM} = 45^\circ$$

Suy ra $\triangle AMK$ vuông cân tại M (dpcm)

Chứng minh tương tự ta cũng có tam giác ANI vuông cân tại N. Suy ra hai tam giác AMK và ANI là các tam giác vuông cân tại M, N

Hai tam giác vuông AMK và ANI có chung góc nhọn $\widehat{MAK}$ nên đồng dạng với nhau (g.g).

Suy ra: $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AK}{AI} \Leftrightarrow AM \cdot AI = AN \cdot AK$ (dpcm)

2. Gọi O là giao điểm của BI và CK Gọi P, Qlần lượt là hình chiếu của O trên AB, AC

Chứng minh: $IP//QK$.

Theo câu 1) $KM \perp AI; IN \perp AK$ nên O là trực tâm của tam giác $A I K$.

Suy ra: $AO \perp IK$.

Vì BI và CK là các tia phân giác các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ nên O cũng là giao điểm ba đường phân giác trong tam giác $\widehat{ABC}$ Suy ra $OP = OQ$.

Tứ giác APOQ có ba góc vuông $\widehat{PAQ} = \widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật APOQ có hai cạnh kề bằng nhau $OP = OQ$ nên là hình vuông. Suy ra $PQ = OA; PQ \perp 0A$ (3)

Xét hai tam giác AMO và KMI có $AM = KM$ (vì tam giác AMK cân tại M),

$\widehat{AMO} = \widehat{KMI} = 90^\circ, MO = MI$ (vì tam giác OMI vuông cân tại M). $\Rightarrow \Delta AMO = \Delta KMI(c.g.c)$

Suy ra $IK = OA(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $IK = PQ$. Mặt khác $IK//PQ$ (do cùng vuông góc với OA; IKQP có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên tứ giác IKQP là hình bình hành.

Suy ra: $IP//QK(dp\text{cm})$.

Câu 7. Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

HD:

Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là n, n+1, n+2, n+3 (n $\in$ Z). Ta có:

n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n . (n + 3)(n + 1)(n + 2) + 1

$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \quad (*)$$

Đặt $n^2 + 3n = t \quad (t \in N)$ thì (*) $= t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

$$= (n^2 + 3n + 1)^2$$

Vì n $\in$ N nên $n^2 + 3n + 1 \in$ N. Vậy n(n + 1)(n + 2)(n+ 3) + 1 là số chính phương