TÀI LIỆU TOÁN LỚP 12
ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

CA 1

Câu 1. [4] Số giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2e^{4x}+me^{2x}+1<\left(m^2+m\right)e^{3x}+\dfrac{x+1}{e^x}$ vô nghiệm là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $m^2e^{4x}+me^{2x}+1<\left(m^2+m\right)e^{3x}+\dfrac{x+1}{e^x}\Leftrightarrow m^2e^{5x}-\left(m^2+m\right)e^{4x}+me^{3x}+e^x-x-1<0$.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$m^2e^{5x}-\left(m^2+m\right)e^{4x}+me^{3x}+e^x-x-1\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\ (*)$.

Đặt $e^x=t>0$, khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành

$f(t)=m^2t^5-\left(m^2+m\right)t^4+mt^3+t-\ln t-1\geq 0,\ \forall t>0$.

Dễ thấy $f(t)$ là hàm số liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ mà $f(1)=0$ nên điều kiện cần $f(t)\geq 0,\forall t>0$ là $f'(1)=0$.

Ta có $f'(t)=5m^2t^4-4\left(m^2+m\right)t^3+3mt^2+1-\dfrac{1}{t}$.

Suy ra $f'(1)=0\Leftrightarrow 5m^2-4\left(m^2+m\right)+3m=0\Leftrightarrow m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1.\end{array}\right.$

*) Với $m=0$, ta có $f(t)=t-\ln t-1$, $f'(t)=1-\dfrac{1}{t}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$. Bảng biến thiên của $f(t)$ trên khoảng $(0;+\infty)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(t)\geq 0,\ \forall t>0$ nên $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

*) Với $m=1$, ta có $f\left(t\right)=t^5-2t^4+t^3+t-\ln t-1=t^3\left(t-1\right)^2+\left(t-\ln t-1\right)>0,\forall t>0$ nên $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. [3] Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1-i\right|=5$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-7-9i\right|+2\left|z-8i\right|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

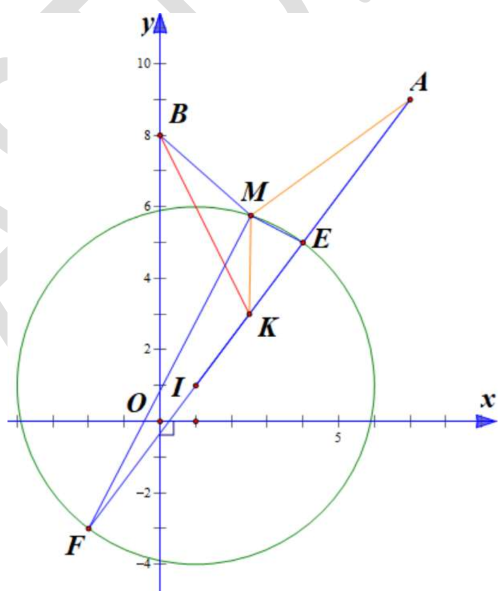
A. $\left(11;12\right)$. **B.** $\left(9;10\right)$. **C.** $\left(12;13\right)$. **D.** $\left(8;9\right)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, ta có $\left|z-1-i\right|=5\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2}=5$, do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(1;1\right)$ bán kính $R=5$.

Xét các điểm $A\left(7;9\right)$ và $B\left(0;8\right)$ khi đó bài toán đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của $P=MA+2MB$ với điểm M thuộc đường tròn $\left(C\right)$.



Ta có $IA=10$ và $IB=5\sqrt{2}$ do đó A,B nằm ngoài đường tròn $\left(C\right)$, hơn thế ta có phương trình đường thẳng $AB:x-7y+56=0$ nên ta có AB và đường tròn $\left(C\right)$ không có điểm chung.

Trên hình vẽ ta có AI cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm E,F theo thứ tự A,E,F ta có $MF\perp ME$.

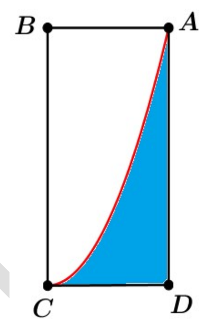
Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ ta tìm được $K\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Ta có $\dfrac{EK}{EA}=\dfrac{FK}{FA}=\dfrac{1}{2}$ suy ra ME là tia phân giác của góc $\widehat{KMA}$ suy ra $MA=2MK$.

Do vậy $P=MA+2MB=2MK+2MB=2\left(MK+MB\right)\geq 2BK=5\sqrt{5}$.

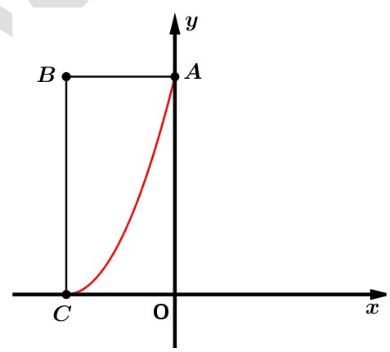
Vậy $\min P=5\sqrt{5}\in\left(11;12\right)$.

Câu 3. [4] Người ta muốn tạo một vật trang trí dạng tròn xoay bằng cách quay miền $\left(R\right)$ (phần được tô đậm như hình vẽ) quanh cạnh CD. Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=2cm$, $AD=4cm$. Miền $\left(R\right)$ được dưới hạn bởi cạnh AD, CD và một phần của Parabol $\left(P\right)$ (đỉnh C, trục đối xứng CB). Thể tích vật trang trí là $x\left(cm^3\right)$, trong đó x là giá trị nào?



A. $\dfrac{32\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{33\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{31\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{36\pi}{5}$.

Lời giải



Dựng hệ trục tọa độ $\left(Oxy\right)$ trong đó O trùng với D, trục Ox chứa cạnh CD, trục Oy chứa cạnh DA. Độ dài của vectơ đơn vị trên cả hai trục là $1cm$.

Từ cách dựng trên, ta có $C\left(-2;0\right)$, $A\left(0;4\right)$.

Gọi $\left(P\right): y=ax^2+bx+c$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=0 \\ c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=4 \end{cases}.$$

Như vậy $(P): y=x^2+4x+4$.

Thể tích vật trang trí là $V=\pi\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^4\,dx=\left.\dfrac{\pi(x+2)^5}{5}\right|_{-2}^{0}=\dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 4. [4] Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+2=0 \\ x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Trong đó các nghiệm $-1,\ 1,\ 3$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1,\ 1,\ 3$.

Ta có $g'(0)=-2f'(0)<0$ (do $f'(0)>0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

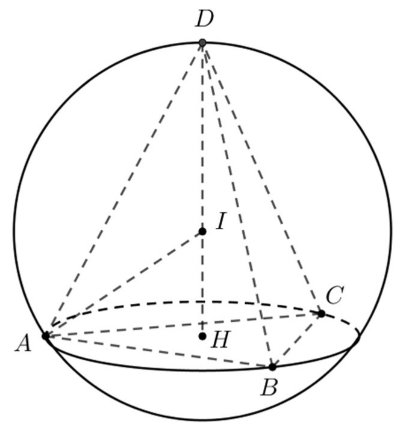
Vậy hàm số $y=f(x^2-2x)$ có đúng 1 điểm cực tiểu là $x=1$.

Câu 5. [4] Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=25$. Mặt phẳng (P): $3x-4z+4=0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Xét tứ diện $ABCD$

có đáy ABC là tam giác đều nội tiếp đường tròn (C) còn D là điểm di chuyển trên mặt cầu (S). Tìm tọa độ điểm D sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ là lớn nhất.

A. $D(4;0;-6)$. **B.** $D(4;0;2)$. **C.** $D(-2;0;-6)$. **D.** $D(4;1;6)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=5$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I xuống (P)

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn (C) và điểm $H\left(-\frac{4}{5};0;\frac{2}{5}\right)$. Độ dài $IH=3$

$AH=\sqrt{AI^2-IH^2}=4$

ΔABC đều nên H là trọng tâm ΔABC. Ta có $AH=\frac{AB\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AB=4\sqrt{3}$

Diện tích ΔABC là $S_{ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}$

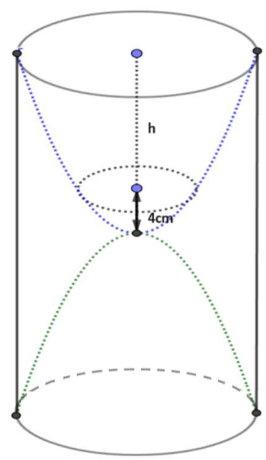
Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.d\left(D;(ABC)\right)=4\sqrt{3}.d\left(D;(ABC)\right)$

Thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow d\left(D;(ABC)\right)$ là lớn nhất.

$\Leftrightarrow H,\ I,\ D$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{ID}=\frac{5}{3}\overrightarrow{HI}\ \Rightarrow D(4;0;-6)$

CA 2

Câu 49: **[Mức độ 4]** Một chiếc đồng hồ cát gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ như hình vẽ (mặt nằm ngang là mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu ngoại tiếp hình trụ và song song với hai mặt đáy của hình trụ). Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ cát thì chiều cao h của mực cát bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của phần trên đó. Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $2,90\left(cm^3/phut\right)$. Khi chiều cao của cát còn 4cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi $8\pi\left(cm\right)$. Biết sau 30 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài gần với số nào nhất?

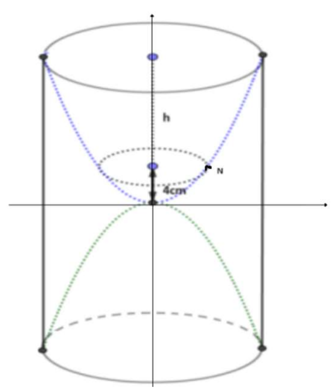


A. $8\left(cm\right)$. **B.** $12\left(cm\right)$. **C.** $9\left(cm\right)$. **D.** $10\left(cm\right)$.

Lời giải

Thể tích của cát trong đồng hồ là: $V=30.2,90=87\left(cm^3\right)$.

Chọn gốc tọa độ như hình vẽ:



Chu vi của đường tròn là $8\pi\left(cm\right)$ nên bán kính đường tròn là $r=4$ khi đó điểm $N(4;4)$

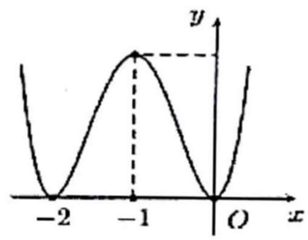
Gọi Parabol phía trên Ox có phương trình là: $y=ax^2$ vì parabol di qua $N(4;4)$ nên ta có phương trình: $4=a.4^2\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$ nên phương trìnhParabol có dạng: $y=\frac{1}{4}x^2$

Thể tích của khối cát trong đồng hồ được tính theo công thức là :

$$V=\pi\int_0^h\left(2\sqrt{y}\right)^2dy \Leftrightarrow 87=2\pi y^2\Big|_0^h \Leftrightarrow 87=2\pi h^2 \Leftrightarrow h\approx 3,7$$

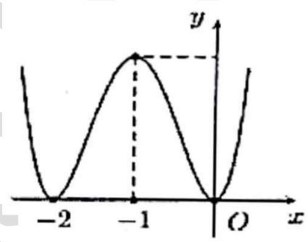
Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ cát thì chiều cao h của mực cát bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của phần trên đó nên chiều cao của khối trụ là: $3,7.\frac{4}{3}.2\approx 9.87$.

Câu 50: **[Mức độ 4]** Cho hàm số $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)$ có đồ thị như hình vẽ . Hàm số $f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải



Xét hàm số $y=f\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)\Rightarrow y'=f'\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right).\dfrac{2x+2}{\ln 2.\left(x^2+2x+2\right)}$

$y'=0\Leftrightarrow f'\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right).\dfrac{2x+2}{\ln 2.\left(x^2+2x+2\right)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ f'\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)=0\end{array}\right.$

Đựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị là $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\\x=0\end{array}\right.$ nên ta có

$f'\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$

Đặt $t=\log_2\left(x^2+2x+2\right)$ vì $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$ nên $t=1\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Xét hàm số $y=f(2x-1)\Rightarrow y'=2f'(2x-1)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow x=1$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
$y=f(2x-1)$	$\searrow$				$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng