

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9
HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:Ngày học:

CA 1

BTVN: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+c-2b)}{ab+1} + \frac{b(b+a-2c)}{bc+1} + \frac{c(c+b-2a)}{ac+1} \geq 0$$

HD:

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a(a+c+b-3b)}{ab+1} + \frac{b(b+a+c-3c)}{bc+1} + \frac{c(c+b+a-3a)}{ac+1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a(3-3b)}{ab+1} + \frac{b(3-3c)}{bc+1} + \frac{c(3-3a)}{ac+1} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a(1-b)}{ab+1} + 1 + \frac{b(1-c)}{bc+1} + 1 + \frac{c(1-a)}{ac+1} + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a+1}{ab+1} + \frac{b+1}{bc+1} + \frac{c+1}{ca+1} \geq 3 \end{aligned}$$

Áp dụng AM-GM ta có:

$$VT \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

Do đó cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & (a+1)(b+1)(c+1) \geq (ab+1)(bc+1)(ca+1) \\ \Leftrightarrow & abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) + ab + bc + ca + 1 \\ \Leftrightarrow & 3 \geq a^2b^2c^2 + 2abc \quad (1) \end{aligned}$$

Lại do: $3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1$, do đó (1) được chứng minh.

Vậy BĐT được chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

CA 2

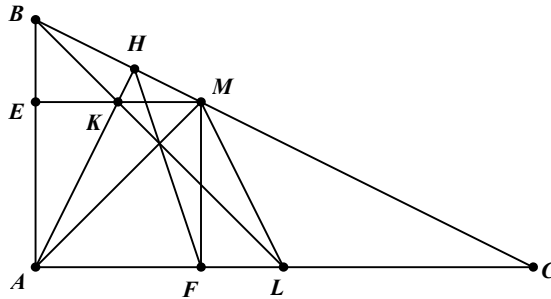
Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH và đường phân giác AM. Kẻ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F. Gọi K là giao điểm của AH và ME. Tia BK cắt AC tại L

1) Chứng minh $CM \cdot CH = CF \cdot CA$ và HF là tia phân giác của góc AHC.

2) Chứng minh tam giác BML cân.

3) Chứng minh $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.

HD:



1) Chứng minh $CM.CH = CF.CA$ và HF là tia phân giác của góc AHC .

Xét $\triangle CMF$ và $\triangle CAH$ có:

\hat{C} chung;

$$\widehat{CFM} = \widehat{CHA} = 90^\circ;$$

$$\Rightarrow \triangle CMF \sim \triangle CAH (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CF} = \frac{CA}{CH} \Rightarrow CM.CH = CF.CA.$$

Xét $\triangle CMA$ và $\triangle CFH$ có:

\hat{C} chung;

$$\frac{CM}{CF} = \frac{CA}{CH} \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\Rightarrow \triangle CMA \sim \triangle CFH (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CHF};$$

Lại có tứ giác $AEMF$ có $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ (GT)$ nên là hình chữ nhật, mà AM là phân giác góc $A \Rightarrow$

$$AEMF \text{ là hình vuông} \Rightarrow \widehat{CAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CHF} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{AHC} - \widehat{CHF} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{AHF} \Rightarrow HF \text{ là tia phân giác của } \widehat{AHC}.$$

2) Chứng minh tam giác BML cân.

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle MEB$ có:

$$AE = ME \text{ (} AEMF \text{ là hình vuông);}$$

$$\widehat{AEK} = \widehat{MEB} = 90^\circ;$$

$$\widehat{AKE} = \widehat{MBE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{KAE});$$

$$\Rightarrow \triangle AEK = \triangle MEB (cgv - gn)$$

$$\Rightarrow EK = EB \Rightarrow \triangle EBK \text{ vuông cân tại } E \Rightarrow \widehat{EBK} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABL \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow AB = AL \text{ mà } AE = AF \Rightarrow BE = FL;$$

Xét $\triangle EBM$ và $\triangle FLM$ có:

$$\widehat{BEM} = \widehat{LFM} = 90^\circ;$$

$$ME = MF \text{ (} AEMF \text{ là hình vuông);}$$

$$BE = FL \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\Rightarrow \triangle EBM = \triangle FLM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BM = LM \Rightarrow \triangle BML \text{ cân tại } M.$$

3) Chứng minh $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.

Ta có:

$$EM \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{MB}{BC} \text{ (Định lý Ta-let)} \Rightarrow BE = \frac{AB \cdot MB}{BC};$$

$$FM \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{AC} = \frac{MC}{BC} \text{ (Định lý Ta-let)} \Rightarrow CF = \frac{AC \cdot MC}{BC};$$

$$\text{Mà } AM \text{ là phân giác } \widehat{BAC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC};$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB \cdot MB}{AC \cdot MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (1)$$

$$\triangle BHA \sim \triangle BAC \text{ (hai tam giác vuông có góc nhọn } B \text{ chung)} \Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HB = \frac{AB^2}{BC};$$

$$\triangle CHA \sim \triangle CAB \text{ (hai tam giác vuông có góc nhọn } C \text{ chung)} \Rightarrow \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC};$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$.