

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  
**BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI (AM-GM) (PHẦN 1)**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Bài 1.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = 2$ . Chứng minh rằng:

$$xy(x^2 + y^2) \leq 2$$

**Bài 2.** Cho  $x, y$  là các số dương thỏa mãn  $x + y = 2$ . Chứng minh rằng:

$$x^3y^3(x^3 + y^3) \leq 2$$

**Bài 3.** Cho  $x > 1, y > 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)} \geq 8$

**Bài 4.** (IMO Shortlist 1988)

Với  $xyz$  là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

**Bài 5.** (IMO Shortlist 1990)

Giả sử  $a, b, c, d$  là các số thực không âm thỏa mãn  $ab + bc + cd + da = 1$ . Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

**Bài 7.** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Chứng minh:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq 3$$

**Bài 8.** Cho  $x, y, z$  là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{x^5 + xy + y^5} + \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} + \frac{xz}{x^5 + xz + z^5} \leq 1$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq 1$$

**Bài 10.** (Việt Nam MO) Các số thực dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Chứng minh rằng:  $x_1 x_2 \dots x_n \geq (n-1)^n$

---

**BTVN:** Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+c-2b)}{ab+1} + \frac{b(b+a-2c)}{bc+1} + \frac{c(c+b-2a)}{ac+1} \geq 0$$

Thầy Trần Ngọc Hà

**TÀI LIỆU TOÁN CƠ BẢN NÂNG CAO LỚP 9**  
**ÔN TẬP TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Cho hình vuông ABCD, M là một điểm nằm giữa B và C. Kẻ AN vuông góc với AM, AP vuông góc với MN (M và P thuộc đường thẳng CD)

a) Chứng minh tam giác AMN vuông cân

b) Chứng minh rằng  $AN^2 = NC.NP$

c) Gọi Q là giao điểm của tia AM và tia DC. Chứng minh tổng  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AQ^2}$  không đổi khi điểm M thay đổi trên cạnh BC

**Câu 2.** Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh AB, BC lần lượt lấy 2 điểm P, Q (Q không trùng với đỉnh của hình vuông) sao cho  $\angle POQ = 90^\circ$ . Đường thẳng AQ cắt đường thẳng DC tại N, đường thẳng OQ cắt đường thẳng BN tại K

1) Chứng minh  $\Delta BPO = \Delta CQO$ . Tính diện tích tứ giác BPOQ theo a

2) Chứng minh  $QK.QO = QB.QC$

3) Hãy tìm vị trí của điểm P trên AB sao cho  $QO.QK$  lớn nhất

4) Khi P, Q thay đổi trên AB, BC và  $\angle POQ = 90^\circ$  thì  $\frac{1}{CK^2} - \frac{1}{CN^2}$  có giá trị không đổi.

**Câu 3.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ) có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh:  $\Delta BFC$  đồng dạng với  $\Delta BDA$  và  $BFD = ACB$

b) Tia EF cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh:  $CD.FK = CK.FD$

c) Gọi M là trung điểm của BC. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với HM, đường thẳng này cắt các đường thẳng AB, AD, AC lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh:  $PQ = QR$

**Câu 4.** Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, tia CX vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

a) Chứng minh  $CE = CF$ .

b) Chứng minh B, D, M thẳng hàng.

c) Chứng minh  $\Delta EAC$  đồng dạng với  $\Delta MBC$ .

d) Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác AEFC có diện tích gấp ba lần diện tích hình vuông ABCD.

**Câu 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ), đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm M sao cho  $HM = AH$ . Vẽ hình bình hành AHMN, MN cắt AC tại E. Vẽ hình bình hành BAED. Chứng minh:

a)  $AB = AE$

b) Ba đường thẳng AD, BE, HN đồng quy và  $DM \parallel HN$ .

**Câu 6.** Cho tam giác ABC có  $\angle C = 120^\circ$ , các đường phân giác BD, AE, CF.

a) Chứng minh rằng:  $\frac{1}{BD} = \frac{1}{BA} + \frac{1}{BC}$ .

b) Tính EDF.

**BTVN:**

**Câu 7.** Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho  $MB < MA$  và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho  $\angle MON = 90^\circ$ . Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

a) Chứng minh  $\Delta MON$  vuông cân.

b) Chứng minh  $MN \parallel BE$ .

c) Chứng minh  $CK \perp BE$ .

d) Qua K vẽ đường thẳng song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh  $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$ .

**Câu 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ) có đường cao AH và đường phân giác AM. Kẻ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F. Gọi K là giao điểm của AH và ME. Tia BK cắt AC tại L

1) Chứng minh  $CM \cdot CH = CF \cdot CA$  và HF là tia phân giác của góc AHC.

2) Chứng minh tam giác BML cân.

3) Chứng minh  $\frac{BE}{CF} = \frac{HB}{HC}$ .

**Thầy Trần Tuấn Việt**