

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HSG LỚP 9 - LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN**  
**HƯỚNG DẪN ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên: ..... Ngày học: .....

**Bài 8.** Cho  $x, y, z > 2$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Chứng minh rằng:  $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$

Giải:

Đặt

$$x = a + 2, y = b + 2, z = c + 2 \Rightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{a+2} + \frac{2}{b+2} + \frac{2}{c+2} = 2$$
$$\Rightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1, (m, n, p) = \left( \frac{a}{a+2}, \frac{b}{b+2}, \frac{c}{c+2} \right) \Rightarrow m + n + p = 1$$
$$\frac{1}{m} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{m} - 1 = \frac{n+p}{m} \Rightarrow a = \frac{2m}{n+p}$$

Tương tự, ta có:  $b = \frac{2n}{m+p}, c = \frac{2p}{m+n}$ . Cần chứng minh:

$8mnp \leq (m+n)(n+p)(m+p)$  (Đúng theo AM-GM cho từng bộ 2 số)

**BTVN:** Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a}{1+2b^3} + \frac{b}{1+2c^3} + \frac{c}{1+2a^3} \geq 1$$

Giải: Ta có:  $\frac{a}{1+2b^3} = \frac{a(1+2b^3) - 2ab^3}{1+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{b^3 + b^3 + 1} \geq a - \frac{2ab^3}{3b^2} = a - \frac{2}{3}ab$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{b}{1+2c^3} \geq b - \frac{2}{3}bc; \frac{c}{1+2a^3} \geq c - \frac{2}{3}ca \Rightarrow P \geq a + b + c - \frac{2}{3}(ab + bc + ca)$$

Mặt khác:  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3 \Rightarrow P \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$ .

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 5.** Cho tứ giác ABCD có  $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$  và  $AB > AD$ , lấy điểm M trên cạnh AB sao cho  $AM = AD$ . Đường thẳng DM cắt BC tại N. Gọi H là hình chiếu của D trên AC, K là hình chiếu của C trên AN. Chứng minh rằng:

- 1) Chứng minh rằng:  $AM^2 = AH \cdot AC$ ;
- 2) Chứng minh rằng  $\widehat{AHM} = \widehat{AMC}$  và tam giác CDN là tam giác cân;
- 3) Chứng minh rằng:  $\widehat{MHN} = \widehat{MCK}$ .

Lời giải

1) Chứng minh tam giác  $\triangle DAC \sim \triangle HDC$  (g.g) nên:

$$DA^2 = AH.AC \text{ mà } AD = AM \text{ (gt)}$$

$$\text{nên } AM^2 = AH.AC$$

2)

$$\text{Do } AM^2 = AH.AC \Leftrightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AM}$$

Xét tam giác  $\triangle AMH$  và  $\triangle ACM$  có

$\widehat{CAM}$  chung

$$\frac{AM}{AH} = \frac{AC}{AM}$$

nên  $\triangle AMH \sim \triangle ACM$  (c-g-c) nên  $\widehat{AHM} = \widehat{AMC}$

Do  $\widehat{AHM} = \widehat{AMC} \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{CMB}$  (1), mà  $AM = AD$  nên

$$\widehat{ADM} = \widehat{AMD} = \widehat{BMN}, \widehat{MDC} = 90^\circ - \widehat{ADM}, \widehat{MNB} = 90^\circ - \widehat{BMN}$$

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MNB}$$

Nên tam giác  $CDN$  cân tại  $C$ .

3)

Theo câu 2 thì  $CD = CN$

$$CN^2 = CD^2 = CH.CA \Rightarrow \frac{CN}{CH} = \frac{CA}{CN}$$

$\Rightarrow \triangle CNH \sim \triangle CAN$  (c-g-c)

$$\Rightarrow \widehat{NHC} = \widehat{CNA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\widehat{MHN} = \widehat{CHN} - \widehat{MHC} = \widehat{CNA} - \widehat{CMB}$$

Do  $CK$  vuông góc  $AN$  và  $\widehat{B} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CNA} - \widehat{CBM} = 90^\circ - \widehat{NCK} - \widehat{CMB} = \widehat{MCB} - \widehat{NCK} = \widehat{MCK}$$

$$\Rightarrow \widehat{MHN} = \widehat{MCK} \text{ (đpcm).}$$

