

**TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8**  
**BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN (PHẦN 1)**  
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:..... Ngày học:.....

**Bài 1.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên khác 0 thỏa mãn:  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

Chứng minh rằng:  $a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 3.

**Bài 2.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên thỏa mãn:  $a + b = c^3 - 2024c$ .

Chứng minh rằng  $M = a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 6.

**Bài 3.** Cho số tự nhiên  $N = 2023^{2024} + 2025$ . Viết  $N$  thành tổng của  $k$  số tự nhiên  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

Đặt  $S = n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_k^3$ . Tìm số dư của phép chia  $S$  cho 6.

(Tạp chí Toán học và tuổi trẻ)

**Bài 4.** Cho  $a, b$  là các số nguyên. Chứng minh rằng:  $F = a^5(b+5) - a(b^5+5)$  chia hết cho 30.

(Chuyên Toán Lam Sơn 2024-2025)

**Bài 5.** Cho  $m, n$  là các số nguyên thỏa mãn số  $m^2 - mn + 4n^2$  chia hết cho 25. Chứng minh rằng số  $m^2 + mn + 4n^2$  chia hết cho 25.

(Chuyên toán Hà Nội 2024-2025)

**Bài 6.** Cho  $m, n$  là 2 số nguyên dương thỏa mãn  $(m, n) + [m, n] = m + n$  và  $m > n$ .

Chứng minh rằng  $m$  chia hết cho  $n$ .

(Saint Peterbug Mathematical Olympiad 2008)

**Bài 7.** Cho  $a, b$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $a^2 - ab + \frac{3}{2}b^2$  chia hết cho 25. Chứng minh rằng cả  $a, b$  đều chia hết cho 5.

(Chuyên Tin Bình Định - 2021)

**Bài 8.** Chứng minh với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $n^2 + n + 16$  không chia hết cho 49.

(Chuyên Toán Hà Nội 2021-2022)

**Bài 9.** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $a_n = 2^{2^{n+1}} - 2^{n+1} + 1, b_n = 2^{2^{n+1}} + 2^{n+1} + 1$ .

Chứng minh rằng  $a_n b_n$  chia hết cho 5.

**Bài 10.** Cho ba số tự nhiên  $a > 1, b > c > 1$  và  $abc + 1$  chia hết cho  $ab - b + 1$ .

Chứng minh  $b$  chia hết cho  $a$ .

(Chuyên Toán Quảng Nam 2024-2025)

---

**BTVN:** Chứng minh rằng với ba số tự nhiên  $a, b, c$  trong đó có một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có:

$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$  chia hết cho 96.

**Thầy Lê Tiến Đạt**