TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8
TAM GIÁC ĐẶC BIỆT

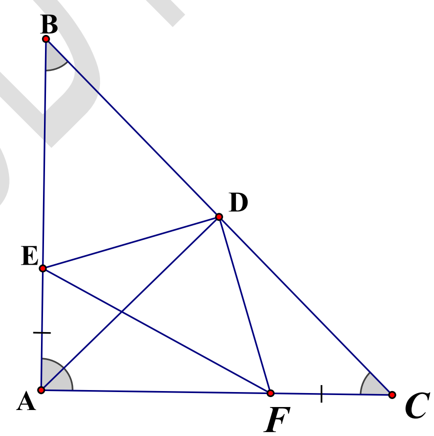
Liên hệ đăng kí học Toán trực tuyến : 0932393956

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Lấy điểm E trên cạnh AB, điểm F trên cạnh AC sao cho AE = CF. Chứng minh rằng:

a) ADB, ADC là các tam giác vuông cân.

b) DEF cũng là tam giác vuông cân.

Hướng dẫn



a) $\angle EAD = \angle ABC = 45^0$ nên ΔABD vuông cân tại D.

$\angle CAD = \angle ACB = 45^0$ nên ΔADC vuông cân tại D.

b) ΔAED và ΔCFD có:

AE = CF (gth)

$\angle EAD = \angle ACB = 45^0$

AD = CD (cạnh bên ΔADC vuông cân tại D)

Do đó $\Delta AED = \Delta CFD$ (c.g.c)

Suy ra DE = DF và $\angle EDA = \angle CDF$.

Ta lại có $\angle CFD + \angle ADF = 90^0$ nên ΔDEF vuôngcân tại D.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $\hat{B} > 90^\circ, \hat{C} = 30^\circ, \widehat{BAM} = 30^\circ$ (M là trung điểm của BC). Tính số đo góc B.

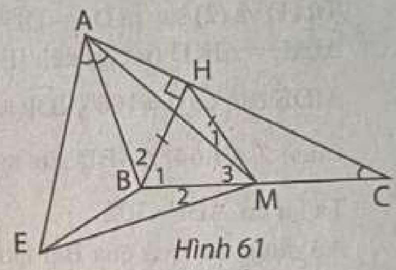
HD:

Giải. (H.61) Chú ý đến $\widehat{BAM}=30^\circ$, ta *vẽ tam giác đều AME* (E và B cùng phía đối với AM). Ta có

$\Delta BAM=\Delta BAE$ (c.g.c) nên $MB=EB$. (1)

Kẻ $BH\perp AC$, ta có $MH=MB$. Do $\widehat{C}=30^\circ$ nên $\widehat{B_1}=60^\circ$, do đó ΔMBH đều, $MB=BH$. (2)

Ta có $MH=MB$, $MA=ME$, $\widehat{M_1}=\widehat{M_2}$ (bằng $60^\circ-\widehat{M_3}$) nên $\Delta AMH=\Delta EMB$ (c.g.c) suy ra $AH=EB$. (3)

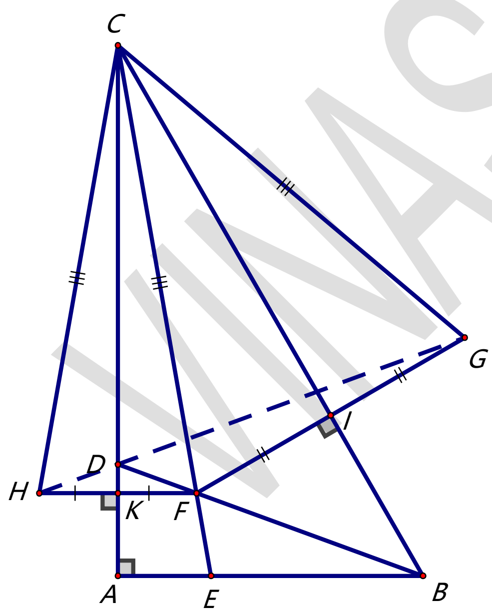


Hình 61

Từ (1), (2), (3) suy ra $AH=BH$. Tam giác AHB vuông cân nên $\widehat{B_2}=45^\circ$.

Do đó $\widehat{ABC}=\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=60^\circ+45^\circ=105^\circ$.

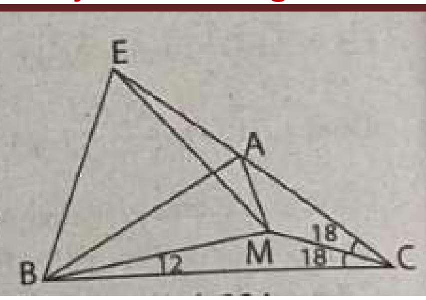
Câu 3. Cho tam giác ABC, $\widehat{A}=90^0$,BC=2AB. $D\in AC$: $\widehat{ABD}=\frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $E\in AB$: $\widehat{ACE}=\frac{1}{3}\widehat{ACB}$, BD và CE cắt nhau tại F; I và K theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ F đến BC và AC. Vẽ các điểm G và H sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH. Chứng minh rằng: H, D, G thẳng hàng



Câu 4. Tam giác ABC cân có $\widehat{A}=108^\circ$, điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $\widehat{MBC}=12^\circ,\widehat{MCB}=18^\circ$. Tính $\widehat{AMB}$

HD

(1)



180. (H.294)

Trên tia CA lấy điểm E sao cho CE = CB. Ta có

$\Delta CME = \Delta CMB$ (c.g.c)

nên ME = MB và $\widehat{BME} = 60^\circ$.

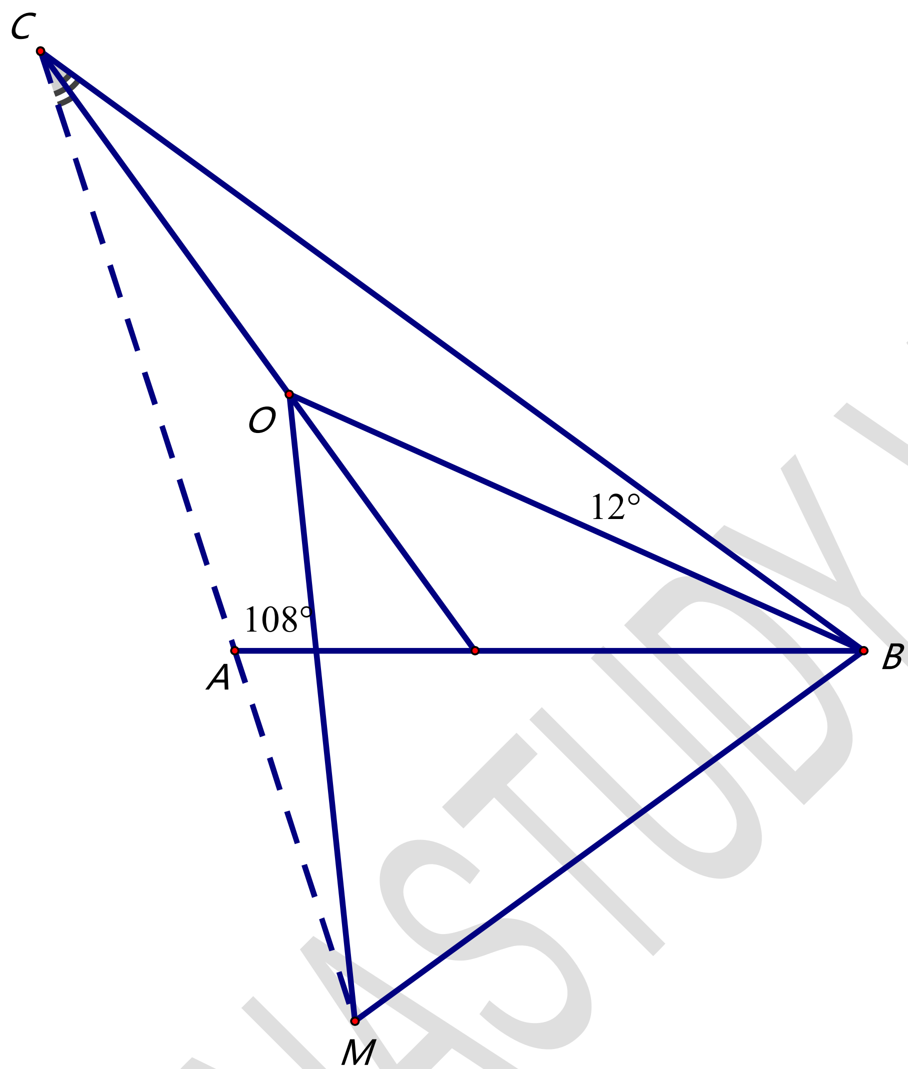
Do đó ΔEBM đều, suy ra BE = BM. (1)

ΔCBE cân tại C có $\widehat{C} = 36^\circ$ nên $\widehat{CEB} = 72^\circ$.

Ta tính được $\widehat{BAE} = 72^\circ$ nên ΔABE cân, suy ra AB = BE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BA = BM. Từ đó $\widehat{AMB} = 78^\circ$.

VINASTUDY.VN



$\widehat{A} = 108^0 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 36^0, \widehat{OBC} = 12^0 \Rightarrow \widehat{COB} = 150^0$

$\widehat{BOM} = 60^0, \widehat{COB} = 150^0 \Rightarrow \widehat{COM} = 150^0 \Rightarrow \Delta COM = \Delta COB(c.g.c)$

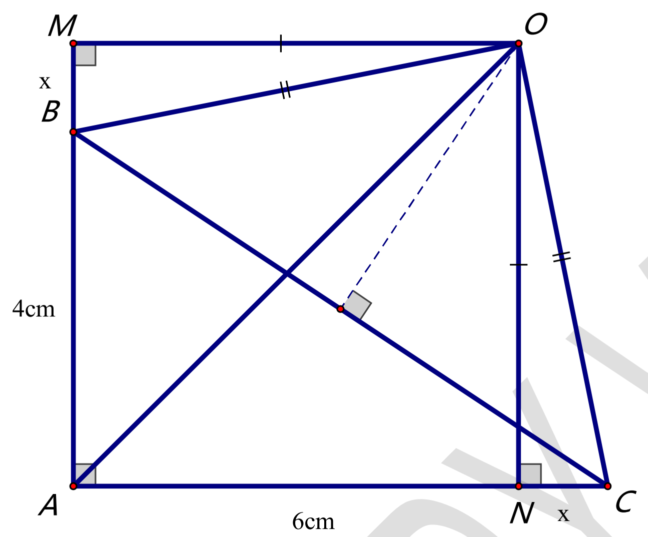
$\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OCB} = \widehat{OCA} \Rightarrow A, C, M$ thẳng hàng

$\widehat{BAM} = \widehat{BMA} = 72^0 \Rightarrow \Delta AMB$ cân tại B

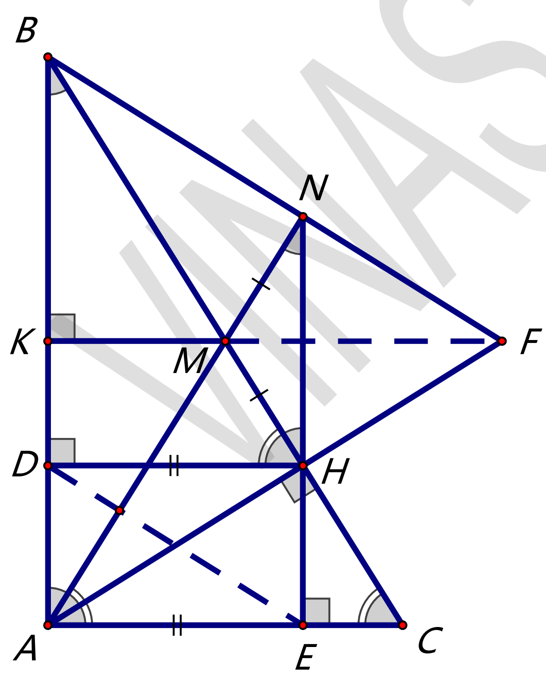
Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB=4cm, AC=6cm. Trung trực BC cắt đường phân giác góc A tại O. Gọi M và N là hình chiếu vuông góc của O lên AB và AC.

a) Chứng minh rằng MB=NC

b) So sánh MN và BC



Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM. Kẻ HE vuông góc với AC, HD vuông góc AB. Giao điểm của HE với AM là N. Chứng minh rằng $AM \perp DE$, hạ $MK \perp AB$ chứng tỏ BN, MK, AH đồng quy



Bài tập về nhà

Câu 7. Cho tam giác ABC dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng $MC = NA = PB$ và góc tạo bởi hai đường thẳng ấy bằng 60°, ba đường thẳng MC, NA, PB đồng quy.

HD:

Xét các tam giác bằng nhau

* Chứng minh AN = MC = BP

Xét hai tam giác ABN và MBC có:

AB = MB; BC = BN (Các cạnh của tam giác đều)

$\widehat{ABN} = \widehat{MBC}$ (cùng bằng $60^0 + \widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ AN = MC (*)

Tương tự: $\triangle ABP = \triangle AMC$ (c.g.c)

AB = AM; BC = BN (Các cạnh của tam giác đều)

$\widehat{BAP} = \widehat{MAC}$ (cùng bằng $60^0 + \widehat{BAC}$)

$\Rightarrow$ BP = MC (**)

Từ (*) và (**) ta có: AN = MC = BP (đpcm).

* Chứng minh $\widehat{AKP} = \widehat{PKC} = \widehat{CKN} = 60^0$

Trong ΔAPC có $\bar{A}_1 + \bar{C}_2 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = 180^0$ mà $\bar{P}_1 = \bar{C}_1$

Trong ΔPCK có $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{P}_2 + \bar{K}_2 = 180^0$

$$\Rightarrow 60^0 + (\bar{C}_1 + \bar{P}_2) + \bar{K}_2 = 180^0 \Rightarrow 60^0 + 60^0 + \widehat{K_2} = 180^0 \Rightarrow \widehat{K_2} = 60^0 \quad (1)$$

Tương tự: $\Delta ABN = \Delta MBC \Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_3}$ mà $\widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{N_2} + \widehat{C_3} = 60^0$ mà $\widehat{C_4} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta NKC$ có $\widehat{N_2} + \widehat{C_3} + \widehat{C_4} + \widehat{K_3} = 180^0 \Rightarrow \widehat{K_3} = 60^0$ (2)

Tương tự: $\Delta ACN = \Delta PCB \Rightarrow \widehat{P_2} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{P_1} + \hat{P}_2 = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{P_1} + \widehat{A_2} = 60^0$ mà $\widehat{A_1} = 60^0 \Rightarrow$ Trong ΔAKP có $\widehat{K_1} = 60^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh

* Chứng minh AN. MC, BP đồng quy

Giả sử MC Ç BP = K ta chứng minh cho A, K, N thẳng hàng

Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{K_2} = 60^0, \widehat{K_3} = 60^0, \widehat{K_1} = 60^0 \Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{K_2} + \widehat{K_3} = 180^0$

$\Rightarrow$ A,K,N thẳng hàng

Vậy AN, MC, BP đồng quy (đpcm)

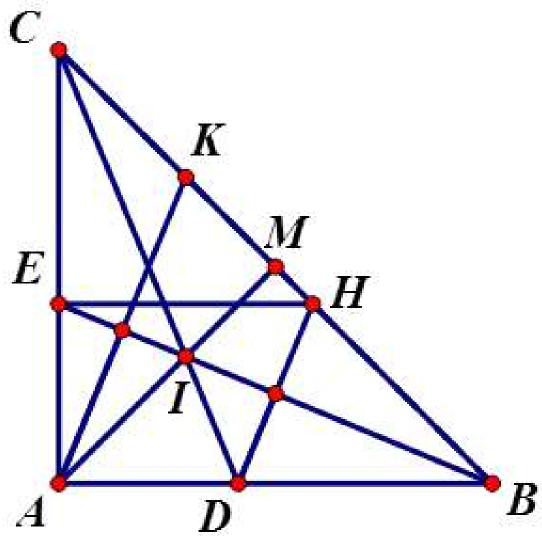
Câu 8. Cho tam giác vuông cân $ABC(AB = AC)$, tia phân giác của các góc B và C cắt AC và AB lần lượt tại E và D.

a) Chứng minh rằng: $BE = CD; AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD. AI cắt BC ở M, chứng minh rằng các $DMAB$; MAC là tam giác vuông cân.

c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE, các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H. Chứng minh rằng $KH = KC$.

HD:



a) Ta có: $\widehat{ABE} = \widehat{ACD} = \frac{45^0}{2} = 22,5^0$

Nên $\Delta ACD = \Delta ABE(g-c-g)$

$\Rightarrow BE = CD$; AD = AE.

b) Vì ΔABC vuông cân tại A

nên AM là đường trung tuyến thì

AM cũng là đường cao.

Suy ra : DMAB; MAC là các tam giác vuông

Có 1 góc bằng 45^0 là tam giác vuông cân.

c) ΔABK có BE vừa là đường cao, vừa là đường

trung tuyến nên ΔABK cân tại B.

Suy ra : BE cũng là đường trung trực

Nên EK = EA $\Rightarrow \Delta AEB = \Delta KEB(c-c-c)$

$\Rightarrow \widehat{EKC} = 90^0; \widehat{KCE} = 45^0$ nên ΔEKC vuông cân

nên KC = KE và $\widehat{CEK} = 45^0$ (*)

nên EK // AM Suy ra : ΔEKH vuông cân tại K

(Vì $\widehat{K} = 90^0$;)

VINASTUDY.VN

Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt