

TÀI LIỆU TOÁN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 7
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:..... Ngày học:.....

Câu 1. Chứng minh rằng $G = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < 4$

HD:

$$\begin{cases} \frac{1}{4^2} = \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{6^2} = \frac{1}{(2 \cdot 3)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^2} \\ \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow G = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow G < \frac{1}{4}$$

Câu 2. Chứng minh rằng $F = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

HD:

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} < \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
$$F < 1 - \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow F < 1.$$

Câu 3. Cho $E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \frac{1}{3.103} + \dots + \frac{1}{10.110}$ và $F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{100.110}$.

Tính tỉ số $\frac{E}{F}$.

HD :

$$E = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}$$
$$E = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{100}{1.101} + \frac{100}{2.102} + \dots + \frac{100}{10.110} \right)$$

$$E = \frac{1}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{2} - \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{110} \right)$$

$$E = \frac{1}{100} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$F = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \dots + \frac{10}{100.110} \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110} \right)$$

$$F = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{E}{F} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}$$

Vậy $\frac{E}{F} = \frac{1}{10}$