

TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
GÓC LƯỢNG GIÁC – LUYỆN TẬP
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

Họ và tên:..... Ngày học:.....

Câu 1. Nếu góc lượng giác có số $(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$ thì hai tia Ox và Oz

- A. Đối nhau. B. Trùng nhau.
C. Vuông góc. D. Tạo với nhau một góc bằng $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 2. Cho hai góc lượng giác: $(Ox, Ou) = -\frac{5\pi}{2} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$ và $(Ox, Ov) = -\frac{\pi}{2} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$. Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A. Ou và Ov trùng nhau. B. Ou và Ov đối nhau.
C. Ou và Ov vuông góc. D. Tạo với nhau một góc bằng $\frac{\pi}{4}$.

Câu 3. Một đường tròn có bán kính $R = 10$ cm. Độ dài cung 40° trên đường tròn gần bằng

- A. 13 cm. C. 11 cm.
B. 9 cm. D. 7 cm.

Câu 4. Có bao nhiêu điểm M trên đường tròn định hướng gốc A thỏa mãn:

$$sd\widehat{AM} = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} ?$$

- A. 6. C. 3.
B. 4. D. 12.

Câu 5. Biết góc lượng giác α có tia đầu là Ou, tia cuối là Ov có số đo là $-\frac{137}{5}\pi$ thì góc (Ou, Ov) có

số đo dương nhỏ nhất là

- A. $0,6\pi$. C. $1,4\pi$.
B. $27,4\pi$. D. $0,4\pi$.

Câu 6. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin(\alpha + 90^\circ)$

c) $C = \cos(270^\circ - \alpha)$

b) $B = \cos(\alpha - 45^\circ)$

d) $D = \cos(2\alpha + 90^\circ)$

Câu 7. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}$

Câu 8. Cho $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin a < 0, \cos a < 0$.

C. $\sin a < 0, \cos a > 0$.

B. $\sin a > 0, \cos a < 0$.

D. $\sin a > 0, \cos a > 0$.

Câu 9. Cho $2\pi < a < \frac{5\pi}{2}$. Kết quả đúng là

A. $\tan a > 0, \cot a > 0$.

C. $\tan a > 0, \cot a < 0$.

B. $\tan a < 0, \cot a < 0$.

D. $\tan a < 0, \cot a > 0$.

Câu 10. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

B. $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$.

D. $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Câu 11. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

A. $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

B. $\cot \alpha = 2$.

C. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Biết $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Giá trị của $\cos \alpha + \sin \alpha$ bằng

A. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

B. $1\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Câu 13. Tính tổng $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$.

VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP
Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(2025\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

Câu 15. Một chiếc quạt trần cánh quay với tốc độ 45 vòng trong 1 phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận.

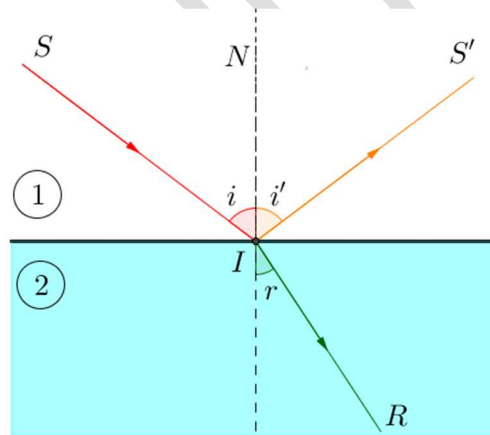
a) Tính góc (theo độ và radian) mà quạt quay được trong 3 giây.

b) Tính độ dài của một vòng quay biết rằng độ dài của cánh quạt là 500 mm.

Câu 16. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong hình dưới. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước).



Cho biết góc khúc xạ $r = 40^\circ$, hãy tính góc tới, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là $\frac{4}{3}$.

Bài tập về nhà

Câu 17. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + \pi)$

b) $B = \tan(\alpha - \pi)$

c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$

d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

Câu 18. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}$

Câu 19. Tính các giá lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) $\tan \alpha = \sqrt{7}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

b) $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

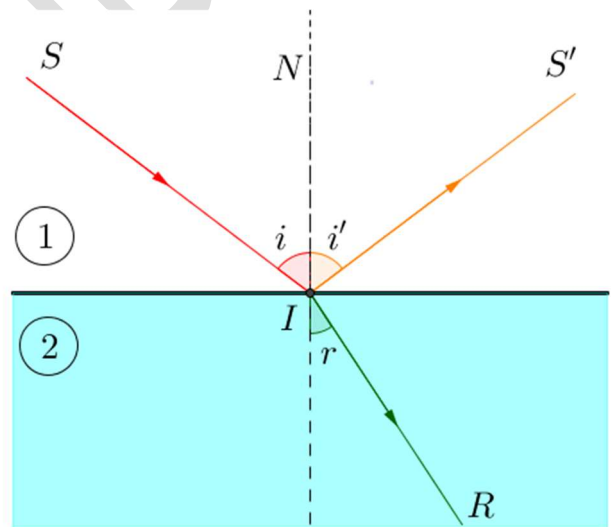
d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Câu 20. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào chất lỏng thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong hình dưới. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (chất lỏng).

Một tia sáng truyền trong không khí (có chiết suất là $n_1 = 1$) tới gặp mặt thoáng của chất lỏng (có chiết suất $n_2 = \sqrt{3}$) ta được hai tia phản xạ và khúc xạ vuông góc với nhau. Tính góc i trong hình.



Thầy Trần Tuấn Việt

TÀI LIỆU TOÁN NÂNG CAO LỚP 11
CHƯƠNG I. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN
BÀI 1.2: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẶNG TRONG KHÔNG GIAN
Liên hệ đăng kí học: 0832.64.64.64

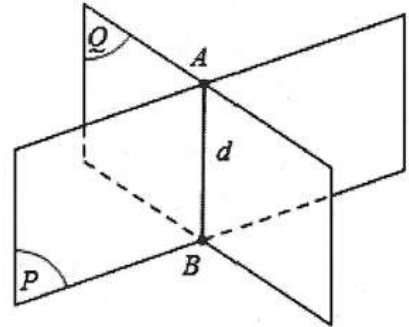
Họ và tên:..... Ngày học:.....

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

❖ **Phương pháp.** Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta đi tìm hai điểm chung của chúng.

Tìm hai điểm chung A và B của hai mặt phẳng (P) và (Q).

- Trên mặt phẳng (P) chọn một đường thẳng d_1 , trên mặt phẳng (Q) chọn một đường thẳng d_2 sao cho hai đường thẳng d_1, d_2 đồng phẳng. Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại A, khi đó A là điểm chung thứ nhất.
- Tương tự, ta tìm được điểm chung thứ hai là B.
Đường thẳng AB chính là giao tuyến cần tìm, $(P) \cap (Q) = AB$.



❖ **Bài tập tự luận**

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (JAD).
- Điểm M nằm trên cạnh AB, điểm N nằm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD. Tìm giao tuyến của

- Mặt phẳng (MNP) và (SAB).
- Mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và SO. Tìm giao tuyến của

- Mặt phẳng (MNP) và (SAB).

2) Mặt phẳng (MNP) và (SAD).

Dạng 2. Tìm giao điểm của hai mặt phẳng

Phương pháp:

- Bước 1: Xác định mp(β) chứa a.
- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Bước 3: Trong (β): $a \cap b = M$, mà $b \subset (\alpha)$, suy ra $M = a \cap (\alpha)$.

Bài 1. Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc (α), M là điểm nằm trong tam giác SCD.

- 1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).
- 2) Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Bài 2. Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α). S là điểm không nằm trên (α).

- 1) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
- 2) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).
- 3) Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Tìm giao điểm T của đường thẳng QR với mặt phẳng (SCD).

Bài 3. Cho tứ diện S.ABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB, P nằm trong ΔACD . Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $BN = 2NC$. Tìm giao điểm của CD, AD và mặt phẳng (MNP).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $SM = 3MA$. Gọi N là trọng tâm của ΔSCD .

- 1) Tìm giao điểm của MO và mặt phẳng (SBC).
- 2) Tìm giao điểm của CD và mặt phẳng (MNO).

❖ **Câu hỏi trắc nghiệm, đúng sai, trả lời ngắn**

VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP
Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến

Câu 1. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I, thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

- A. (BCD) và (DEF). B. (BCD) và (ABC).
 C. (BCD) và (AEF). D. (BCD) và (ABD).

Câu 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. IJCD là hình thang.
 B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.
 C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$.
 D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm ABCD).

Câu 3. Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

- A. IK. B. BC. C. AK. D. DK.

Câu 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (JAD)$.		
b)	ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND), (ADC)$.		
c)	BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI), (ABD)$.		
d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$ song song với đường thẳng IJ.		

Câu 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho MN không song song với BC. Gọi P là điểm nằm trong $\triangle BCD$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai

VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP
Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến

a)	$MN = (MNP) \cap (ABC)$		
b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP), (BCD)$ là đường thẳng cắt BC		
c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP), (ABD)$ là đường thẳng cắt AB và DC		
d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP), (ACD)$ là đường thẳng cắt AB và DC		

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD , J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC , gọi $F = IJ \cap CD$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ) .

Đáp án:.....

Câu 7. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A.** CD và NP . **B.** CD và MN . **C.** CD và MP . **D.** CD và AP .

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

- A.** điểm F .
B. giao điểm của đường thẳng EG và AF .
C. giao điểm của đường thẳng EG và AC .
D. giao điểm của đường thẳng EG và CD .

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD)

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$SC = (SAC) \cap (SBD)$		
b)	Giao điểm I của AM và mặt phẳng (SBD) là giao điểm của hai đường thẳng AM và SO .		
c)	Giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) là trọng tâm của tam giác SAC .		

VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP
Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến

d)	$AI = \frac{2}{3}IM$		
-----------	----------------------	--	--

Câu 9. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$, $E = CD \cap NP$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	NM là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP), (ABC)		
b)	DC là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCD), (ADC)		
c)	Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là điểm E		
d)	Giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của (BCD), (ADC) đường thẳng AD với đường thẳng MP		

Câu 10. Cho hình chóp S.ABCD với M là một điểm trên cạnh SC, N là một điểm trên cạnh BC.

Gọi $O = AC \cap BD$ và $K = AN \cap CD$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).		
b)	Giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên cạnh SO		
c)	KM là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).		
d)	Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (AMN) là điểm nằm trên cạnh KM		

Câu 11. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm AB, J là điểm thuộc cạnh AD sao cho $JD = \frac{1}{3}JA$,

gọi $E = IJ \cap BD$. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ và mp(BCD).

Đáp án:.....

Câu 12. Cho tứ giác ABCD có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng (ABCD). Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C. Điền đáp án vào chỗ trống sau.

Để tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM), chúng ta làm các bước sau:

VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP
Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến

Bước 1. Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD .

Bước 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM).

Gọi $K = AM \cap SO$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM) là

Đáp án:.....

Bước 3. Khi đó giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là điểm N với N là giao điểm của hai đường thẳng

Đáp án:.....

Cô Nguyễn Phương Thảo