

**TOÁN CƠ BẢN NÂNG CAO LỚP 11**  
**PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC – PHẦN 2**  
 Liên hệ đăng kí học Toán trực tuyến: 0932393956

<b>Công thức biến đổi tích thành tổng</b>	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
	$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
	$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
<b>Công thức biến đổi tổng thành tích</b>	$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$ $\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$ $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$ $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$

**Dạng 3: Tính giá trị lượng giác (áp dụng công thức tích thành tổng, tổng thành tích)**

**Câu 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) 
$$A = \frac{\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6}}$$

b) 
$$B = 8 \cdot \sin \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

**Câu 2.** Biến đổi thành tổng:

a)  $4 \sin 3x \cdot \sin 2x \cdot \cos x$

b)  $4 \sin \frac{13x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}$

**Câu 3.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) 
$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}$$

b) 
$$B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$$

**Dạng 4: Rút gọn/Chứng minh biểu thức lượng giác**

**Câu 4.** Cho góc bất kì  $\alpha$ . Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)^2 = 1 + \sin 4\alpha$ ;

b)  $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = \cos 4\alpha$ .

**Câu 5.** Chứng minh rằng  $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) = \sin x$ .

**Câu 6.** Cho góc bất kì  $\alpha$  thỏa mãn điều kiện xác định. Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ .

b)  $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

**Câu 7.** Tính:

a)  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$

b)  $\cos 14^\circ + \cos 134^\circ + \cos 106^\circ$

**Câu 8.** Chứng minh rằng:

a)  $\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ - \sin 100^\circ = \sin 40^\circ$

b)  $\frac{\sin(45^\circ + a) - \cos(45^\circ + a)}{\sin(45^\circ + a) + \cos(45^\circ + a)} = \tan a$

c)  $\frac{3 \cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = -\cot 15^\circ$

d)  $\sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Câu 9.** Chứng minh:

a)  $4 \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$

b)  $4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$

Áp dụng tính:

$A = \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

$B = \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

**Dạng 5: Nhận dạng tam giác**

**Câu 10.** Cho tam giác ABC có  $\hat{B} = 75^\circ$ ;  $\hat{C} = 45^\circ$  và  $a = BC = 12$  cm.

a) Sử dụng công thức  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$  và định lý sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC được

cho bởi công thức  $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ .

b) Sử dụng kết quả ở câu a) và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC.

**Câu 11.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{B} = 75^\circ; \widehat{C} = 45^\circ$  và  $a = BC = 12$  cm.

a) Sử dụng công thức  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$  và định lý sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC được

cho bởi công thức  $S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .

b) Sử dụng kết quả ở câu a) và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC.

**Câu 12.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{B} = 105^\circ; \widehat{A} = 30^\circ$  và  $a = BC = 6$  cm.

a) Sử dụng công thức  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$  và định lý sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC được

cho bởi công thức  $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ .

b) Sử dụng kết quả ở câu a) và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC.

#### **Dạng 6: Các bài toán có yếu tố thực tế, liên môn**

**Câu 13.** Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), x(t) là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình :

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

**Câu 14.** Trong Vật lí, điện áp tức thời hai đầu đoạn mạch xoay chiều được cho bởi công thức  $u = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$  (V), trong đó t là thời gian,  $\omega$  là tần số góc,  $U_0$  là điện áp cực đại ( $U_0 > 0$ ) và  $\varphi$  là pha ban đầu.

Xét đoạn mạch MP gồm hai đoạn mạch MN và NP ghép nối tiếp. Điện áp tức thời trên các đoạn mạch MN và NP lần lượt là  $u_{MN} = 120 \cos(100\pi t)$  (V);  $u_{NP} = 120 \sin(100\pi t)$  (V).

Biết biểu thức điện áp hai đầu đoạn mạch MP là  $u_{MP} = u_{MN} + u_{NP}$ , hãy sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm điện áp cực đại, pha ban đầu của điện áp này.

**Bài tập về nhà**

**Câu 15.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{20} \cdot \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{20} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}.$$

$$\text{b) } B = \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}.$$

**Câu 16.** Chứng minh đẳng thức sau:

$$\tan(a+b) + \tan(a-b) = \frac{2 \tan a (1 + \tan^2 b)}{1 - \tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{2 \cot a (1 + \cot^2 b)}{\cot^2 a \cdot \cot^2 b - 1}.$$

**Câu 17.** Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình :

$$x_1(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)},$$

$$x_2(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

**Giáo viên: Thầy Trần Tuấn Việt**

TOÁN CƠ BẢN NÂNG CAO LỚP 11  
CHƯƠNG I. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN  
BÀI 1.4 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN  
Liên hệ đăng kí học Toán trực tuyến: 0932393956

**Dạng 3. Tìm thiết diện của mặt phẳng với hình chóp.**

- ❖ Thiết diện (hay mặt cắt) của hình **H** khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là phần chung của **H** và  $(\alpha)$ .
- ❖ **Phương pháp.** Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

**Bài 1.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Lấy điểm  $M$  nằm trên cạnh  $SA$  sao cho  $MA = 2MS$ ,  $N$  là điểm nằm trong tam giác  $SAB$ ,  $O$  là trung điểm  $BC$ . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNO)$

**Bài 2.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Lấy điểm  $E$  nằm trên cạnh  $SA$ ,  $F$  nằm trong tam giác  $SAB$ ,  $K$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(EFK)$ .

**Bài 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang với đáy lớn  $AD$ . Gọi  $M$  là một điểm trên cạnh  $SB$ . Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng  $(AMD)$ .

**Bài 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $SAB$ ,  $N$  là điểm nằm trong tam giác  $BCD$ ,  $O$  là điểm thuộc cạnh  $CD$ . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNO)$ .

**Bài 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình thang đáy lớn  $AB$ . Lấy điểm  $M$  trên đoạn  $SA$ , lấy điểm  $N$  trên đoạn  $SB$  và điểm  $P$  trên đoạn  $SC$  sao cho  $MN$  cắt  $AB$  tại  $E$ .  $NP$  cắt  $BC$  tại  $F$  và  $MP$  cắt  $AC$  tại  $G$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Hãy chứng minh 3 điểm  $E, F, G$  có thẳng hàng

❖ **Câu hỏi trắc nghiệm, đúng sai, trả lời ngắn**

**Câu 1.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $L, M, N$  lần lượt là các điểm trên các cạnh  $SA, SB$  và  $AC$  sao cho  $LM$  không song song với  $AB$ ,  $LN$  không song song với  $SC$ . Mặt phẳng  $(LMN)$  cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì

**Đáp án:**.....

**Câu 2.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Mặt phẳng  $(GCD)$  cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

B.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ .

C.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ .

D.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

**VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP**  
**Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến**

**Câu 3.** Cho tứ diện đều ABCD có độ dài các cạnh bằng  $2a$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tam giác DMN		
b) Tam giác DMN là tam giác đều có cạnh bằng $a\sqrt{3}$		
c) Tam giác DMN là tam giác cân tại M		
d) Diện tích thiết diện của mặt phẳng (MNP) với hình chóp bằng $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$ .		

**Câu 4.** Cho tứ diện SABC. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC		
b) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC.		
c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC.		
d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC.		

**Câu 5.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của MN và SO.		
b) Giao điểm Q đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của PE và SO.		
c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Vậy I, J, K thẳng hàng.		
d) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Vậy I, J, K không thẳng hàng		

**VINASTUDY – TRƯỜNG HỌC TOÁN TRỰC TUYẾN LIÊN CẤP**  
**Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 3 đến lớp 12 qua hệ thống lớp học trực tuyến**

**Câu 6.** Cho tứ diện ABCD và M là một điểm bên trong  $\Delta ABC$ , N là điểm bên trong của  $\Delta ACD$ . Gọi  $E = AM \cap BC$ ;  $F = AN \cap CD$  và  $G = DN \cap AC$ .

a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD).

**Đáp án:**.....

b) Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC).

**Đáp án:**.....

**Câu 7.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Hỏi ba điểm I, B, D có thẳng hàng hay không?

**Đáp án:**.....

**Câu 8.** Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Hỏi ba đường thẳng CD, IG, HF có đồng quy không?

**Đáp án:**.....

**Giáo viên: Cô Nguyễn Phương Thảo**