TOÁN BỒI DƯỠNG HSG LỚP 9 – LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 5. Tìm x nguyên dương để $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương (23)

(Đề thi HSG lớp 9 TP Bắc Giang năm 2017-2018)

HD:

Vì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3+14x^2+9x-6=k^2$ với $k\in N$

Ta có $4x^3+14x^2+9x-6=\ldots=(x+2)\left(4x^2+6x-3\right)$ nên ta có $(x+2)\left(4x^2+6x-3\right)=k^2$

Đặt $\left(x+2,4x^2+6x-3\right)=d$ với $d\in N$

Ta có $x+2\,\vdots\,d\Rightarrow(x+2)(4x-2)\,\vdots\,d\Rightarrow 4x+6x-4\,\vdots\,d$

Ta lại có $4x^2+6x-3\,\vdots\,d\Rightarrow\left(4x^2+6x-3\right)-\left(4x^2+6x-4\right)=1\,\vdots\,d\Rightarrow d=1$

Vậy $\left(x+2,4x^2+6x-3\right)=1$

mà $(x+2)\left(4x^2+6x-3\right)=k^2$ nên ta có

$x+2$ và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2=a^2$ và $4x^2+6x-3=b^2$ với $a,b\in N$.

Vì $x>0$ nên ta có $4x^2<b^2<4x^2+12x+9\Leftrightarrow(2x)^2<b^2<(2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2=(2x+1)^2\Leftrightarrow 4x^2+6x-3=4x^2+4x+1\Leftrightarrow x=2$

Với $x=2$ ta có $4x^3+14x^2+9x-6=100=10^2$ là số chính phương.

Câu 6. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. CMR: $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2019 – 2020)

Vì $12n^2+1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2+1=2m+1^2, m\in\mathbb{N}$.

Suy ra, $mm+1=3n^2$.

Vì $m;m+1=1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} m=3u^2;m+1=v^2 \\ m=v^2;m+1=3u^2 \end{array}\right.,u,v\in\mathbb{Z}^*$.

Nếu $m=v^2;m+1=3u^2$ thì $v^2=3u^2-1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1 . Do đó chỉ xảy ra $m=3u^2;m+1=v^2$.

Ta có $2\sqrt{12n^2+1}+2=22m+1+2=4m+4=4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh).