TOÁN BỒI DƯỠNG HSG LỚP 9 – LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Liên hệ đăng kí học Toán trực tuyến: 0932393956

CA 1

Bài 1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2$.

Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$

HD:

Ta có: $2=xy+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+Q$

$\Rightarrow (2-Q)^2=\left[xy+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\right]^2$

$\Rightarrow 4-4Q+Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$

Ta lại có

$Q^2=x^2\left(y^2+1\right)+y^2\left(x^2+1\right)+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$

$\Rightarrow 4-4Q=1 \Leftrightarrow Q=\frac{3}{4}$

Bài 2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $\left(x+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y+\sqrt{x^2+1}\right)=1$. Tính giá trị của $A=x+y$.

HD:

Từ giả thiết ta có:

$xy+x\sqrt{x^2+1}+y\sqrt{y^2+1}+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=1$

$\Rightarrow 1-xy-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=x\sqrt{x^2+1}+y\sqrt{y^2+1}$

$\Rightarrow \left[1-xy-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\right]^2=\left[x\sqrt{x^2+1}+y\sqrt{y^2+1}\right]^2$

$$\Rightarrow 1+x^2y^2+\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-2xy-2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$$

$$=x^2\left(x^2+1\right)+y^2\left(y^2+1\right)+2xy\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow 2+2x^2y^2-2xy-2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=x^4+y^4\Rightarrow x^4+y^4-2x^2y^2=2\left[1-xy-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\right]$$

$$\Rightarrow 2\left[1-xy-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\right]=\left(x^2-y^2\right)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow 1-xy-\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\ge 0\Rightarrow 1-xy\ge\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$$

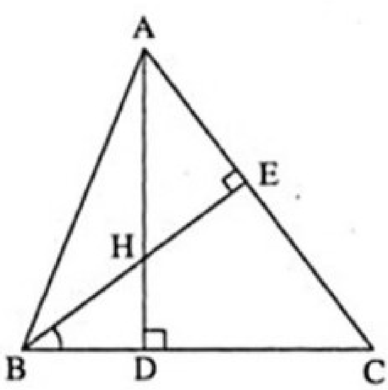
$$\Rightarrow (1-xy)^2\ge\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\Rightarrow 1+x^2y^2-2xy\ge x^2y^2+x^2+y^2+1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2xy\le 0\Rightarrow (x+y)^2\le 0\quad (1)$$

Do $(x+y)^2\ge 0$ với mọi x,y nên (1) xảy ra khi $x+y=0\Rightarrow A=x+y=0$.

CA 2

Câu 11. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $HD:HA=1:2$, chứng minh rằng $\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=3$.



HD:

$\operatorname{tg}B=\dfrac{AD}{BD};\operatorname{tg}C=\dfrac{AD}{CD}$.

Suy ra $\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=\dfrac{AD^2}{BD\cdot CD}$ (1)

$\widehat{HBD}=\widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

$\widehat{HDB}=\widehat{ADC}=90^\circ$.

Do đó $\triangle BDH\backsim\triangle ADC(g-g)$, suy ra $\dfrac{DH}{DC}=\dfrac{BD}{AD}$, do đó $BD.DC=DH.AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=\dfrac{AD^2}{DH\cdot AD}=\dfrac{AD}{DH}$(3)

Theo đề bài $\dfrac{HD}{AH}=\dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{HD}{AH+HD}=\dfrac{1}{2+1}$ hay $\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{1}{3}$, suy ra $AD=3HD$. Thay vào (3) ta được

$\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=\dfrac{3HD}{DH}=3$.