

TOÁN BỒI DƯỠNG HSG LỚP 9 – LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Liên hệ đăng kí học Toán trực tuyến: 0932393956

CA 1

Bài 1. Xét đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(1 + \sqrt{2}) = 2024$ thì $P(1 - \sqrt{2}) = 2024$.

HD:

$$\text{Ta có: } P(1 + \sqrt{2}) = 2024 \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^2 + a(1 + \sqrt{2}) + b = 2024 \Rightarrow (a + 2)\sqrt{2} = 2021 - a - b.$$

Do $a + 2; 2021 - a - b$ là các số nguyên mà $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên phải xảy ra:

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ 2021 - a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2023 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) + 2023 = 2024.$$

Bài 2. Đặt $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{\phi} + \frac{b}{\phi^2} + \frac{c}{\phi^3} = \phi$. Tính $S = 2a + b + c$.

HD:

$$\text{Từ giả thiết } \frac{a}{\phi} + \frac{b}{\phi^2} + \frac{c}{\phi^3} = \phi$$

$$\Rightarrow a\phi^2 + b\phi + c = \phi^4 \Rightarrow a\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + c = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 3a + b + 2c + \sqrt{5}(a + b) = 7 + 3\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}(a + b - 3) = 7 - 3a - b - 2c.$$

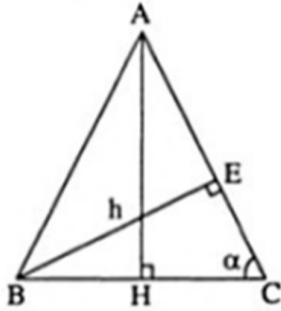
Do a, b, c là các số nguyên nên $a + b - 3$ và $7 - 3a - b - 2c$ cũng là các số nguyên, mà $\sqrt{5}$ là số vô tỉ nên phải xảy ra:

$$\begin{cases} a + b - 3 = 0 \\ 7 - 3a - b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b + 2c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + c = 2 \end{cases} \Rightarrow S = 2a + b + c = 5.$$

Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng h, góc ở đáy của

tam giác bằng α . Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha}$

HD:



Hình 3-13

Tam giác BCE vuông tại E, ta có:

$$\sin \alpha = \sin C = \frac{BE}{BC} = \frac{h}{BC},$$

$$\text{suy ra } BC = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Kê

$$AH \perp BC$$

Ta có,

$$HB = HC = \frac{1}{2} BC = \frac{h}{2 \sin \alpha}$$

Tam giác AHC vuông tại H, nên

$$AH = HC \cdot \operatorname{tg} C = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{2 \cos \alpha}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{h}{2 \cos \alpha} = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha}.$$